Complex Algebra

+2 LEVEL

Dr. Arnab Chakraborty

Associate Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

⋄

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

⋄

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

এসে গেল আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের plus two level-এর চতুর্থ বই। প্রথম বইটা ছিল Permutation and Combination, দ্বিতীয়টা Differential Calculus আর তৃতীয়টা Integral Calculus. এইসব বই যারা পড়েছ, তারা এই সিরিজের মূল কথাটা জানোই--

- Plus two level-এ খালি একটা বোর্ডের সিলেবাসের কথা মাথায় রাখলে চলে না। বিভিন্ন পরীক্ষা বিভিন্ন দিকে জোর দেয়। Competitive পরীক্ষার প্রশ্নগুলো মাঝে মাঝেই সব সিলেবাসের বেড়া পার করে দেয়, কী করে যে কষতে হবে বোঝাই যায় না। আমাদের plus two level সিরিজের বইগুলো পাঠ্যবিষয়ের এই বিশাল বিস্তারের কথা মাথায় রেখে লেখা। একেবারে গোড়ার ধারণাগুলো থেকে শুরু করে পাঁচ বছরের JEE আর ISI-এর B.Stat/B.Math-এর প্রশ্নগুলো পর্যন্ত বিশদ আলোচনা করা হয়েছে এখানে।

- অংক জিনিসটা ইংরাজিতে শেখাই ভালো। পরবর্তীকালে যে সব বই পড়তে হবে, সেগুলো তো সব ইংরাজিতেই লেখা। তাছাড়া যেসব competitive পরীক্ষায় বুঝিয়ে লিখতে হয়, বা interview-তে উত্তর দিতে হয়, তখনও ইংরাজিই ভরসা। কিন্তু তা বলে পাঠ্যবইয়ের যাবতীয় বোঝানোগুলোও যদি ইংরাজিতেই থাকে, তবে অধিকাংশ বাঙালী ছাত্রের পক্ষেই সেটা সহজ হয় না, তখন না বুঝে মুখস্থ করা ছাড়া পথ থাকে না। ইংরাজি আর অংকের এই দুস্তর ব্যবধানের উপর সেতুবন্ধনের জন্য এই বইতে বোঝানোগুলো সব বাংলায় রাখা হয়েছে, যদিও অংকগুলো সবই ইংরাজিতে।

Complex algebra জিনিসটা অনেকটা হঠাৎ যেন ছোটো হয়ে যাওয়ার মত। ছোটো ছোটো যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ, $(a+b)^2$-এর ফর্মুলা, ইত্যাদি সব আরেকবার নতুন করে শেখা। খালি এখানে কাজ করব একটা নতুন ধরণের সংখ্যা নিয়ে, যে সংখ্যার জগতে -1-এরও square root হয়! এই নতুন ধরণের সংখ্যাদের উৎপত্তির ইতিহাস বেশ মজার। সেটাও বলব এই বইতে। Electronics engineering আর physics শিখতে এই নতুন ধরণের সংখ্যারা অপরিহার্য। সেই সব নিয়েও সহজ ভাষায় আলোচনা করা হয়েছে এখানে।
পুরো বইটাকে Day 1, Day 2,... এইভাবে ভেঙে সাজানো আছে। একদিনের পড়া হিসেবে যতটা দিয়েছি, তার চেয়ে বেশী একদিনে করতে গেলে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। MCQ-এর জমানায় পরীক্ষায় গুছিয়ে অংক লেখার চাহিদা কমে গেছে। কিন্তু তাও অংক গুছিয়ে লিখতে পারাটা দরকারী। সেগুলো handwriting-এ লিখে দিয়েছি।

বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। এই কাজে বন্ধুবর কল্লোল মাইতি অনেকটা সাহায্য করেছেন। কিন্তু কিছু ভুলচুক তাও নির্ঘাত থেকে গেছেই। ভুল ত্রুটি যা চোখে পড়বে সেগুলো এই ওয়েবপেজে দিয়ে দেবার চেষ্টা করব--

`https://arnabc74.github.io/hscomplex/`

তোমাদেরও কিছু জানাবার থাকলে ওই পেজে লিখে দিতে পারবে। তাছাড়া যোগাযোগ করার জন্য arnabc74gmail.com বা 9231542600 ব্যবহার করতে পারো। এমনি ফোনের থেকে Whatsapp করলেই বেশী ভালো। বইয়ের যে জায়গা থেকে প্রশ্ন করবে, যদি সেখানকার পাতা আর অধ্যায়ের সংখ্যার সাথে সাথে পাতাটার একটা ছবিও পাঠিয়ে দাও Whatsapp-এ, তবে আমার উত্তর দিতে খুব সুবিধা হয়।

--অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
গোড়ার কথা

DAY 1
"মাইনাসে মাইনাসে প্লাস হয়"

ছোটোবেলায় স্কুলে থাকতে তিনটে মন্ত্র শিখেছিলাম--

- "মাইনাসে মাইনাসে গুণ করলে প্লাস হয়",
- "প্লাসে মাইনাসে গুণ করলে মাইনাস হয়"
- আর "প্লাসে প্লাসে গুণ করলে প্লাস হয়।"

যেমন, যদি 2×3 করো, তবে 6 পাবে, এখানে 2 হল গিয়ে $+2$, আর 3-টা হল $+3$. তাদের গুণ করে পেলে $+6$. মানে "প্লাসে প্লাসে গুণ করে প্লাস" পাওয়া গেল। যদি $(-2) \times (-3)$ করো, তাহলেও "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস" হয়ে গিয়ে উত্তর হবে সেই $+6$. একইভাবে, $(-2) \times 3$ বা $2 \times (-3)$ করলে পাবে -6.
এগুলো সকলেই মন্ত্রের মত ব্যবহার করে, অতশত না ভেবেই। একটু চিন্তা করলেই বোঝা যায় যে, ব্যাপারটা মোটেই অস্বাভাবিক কিছু নয়। যেমন ধরো, বাজার করার ক্ষেত্রে। সেখানে মাইনাস টাকা মানে হল ধার। যেমন

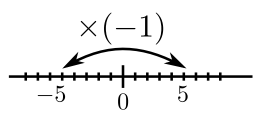
> "আমার কাছে -50 টাকা আছে"

মানে

> "আমার 50 টাকা ধার আছে"।

যদি সেই -50-কে আরেকবার মাইনাস করি, তার মানে সেই ধার শোধ করতে চাই, তবে তার জন্য লাগবে কড়কড়ে নগদ 50 টাকা, অর্থাৎ $+50$ টাকা। সুতরাং -50-এর মাইনাস হল $+50$, মানে $(-1) \times (-50) = +50$. এই প্রসঙ্গে "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস হয়" মন্ত্রটা মেনে নিতে আমাদের আপত্তি থাকে না।
যদি number line দিয়ে ভাবো, তাহলেও ব্যাপারটা খুবই স্বাভাবিক। কোনো সংখ্যার আগে মাইনাস চিহ্ন বসানো মানে সেই সংখ্যাটাকে 0-কে কেন্দ্র করে প্রতিফলিত করা (Fig 1)। সুতরাং 5-কে -1 দিয়ে গুণ করলে যেমন -5 হয়, তেমনি -5-কে ফের -1 দিয়ে গুণ করলে আবার 5-ই ফিরে আসে।
এই "মাইনাসে মাইনাসেও প্লাস" আবার "প্লাসে প্লাসেও প্লাস" মন্ত্র দুটোর ফলে যেটা দাঁড়ায় সেটা হল, কোনো সংখ্যাকে নিজের সঙ্গে গুণ করলে (মানে square করলে) উত্তরটা কোনো দিনই negative হতে পারে না। সুতরাং যদি বলি "-1-এর square root কত?", তবে তার উত্তর হয় না। ক্লাস টেন অব্দি আমরা এটাই শিখে থাকি।
এইবার আমি ঠিক এর উল্টো কথাটাই বলতে চলেছি--

Fig 1



-1-এর square root আছে। তাও আবার একটা না, দু দুটো, তাদের নাম হল i আর $-i$.

গোলমেলে শোনাচ্ছে? ব্যাপারটা সত্যিই গোলমেলে! এবং এইরকম গোলমাল অংকের ইতিহাসে বারবারই ঘটেছে।
আসলে সংখ্যা বলতে খালি এক ধরণের জিনিসই বোঝায় না, সংখ্যারা নানারকমের হয়। এমন সব ধরণের সংখ্যা আছে, যাদের না জানা থাকলে কল্পনা করাও দুষ্কর। ঠিক যেমন প্রাণী বলতে আমরা যারা মানুষ, কুকুর, বেড়াল, পাখী এইসব অতিপরিচিত প্রাণীদের কথাই বুঝি, তাদের পক্ষে এমন প্রাণীর অস্তিত্বে বিশ্বাস করাও কঠিন, যার আটটা পা, পাখীর মত ঠোঁট, আবার পা দিয়ে রক্ত চুষে খেতে পারে। অথচ অক্টোপাস মোটেই কাল্পনিক কোনো প্রাণী নয়! একেকটা এমন অদ্ভুত প্রাণী আছে যে, প্রথম দর্শনে তাদের দেখে "এটা নিশ্চয়ই ভূত" বলে হুলুস্থুলু বাঁধিয়ে ফেলা খুবই স্বাভাবিক। প্রাণীজগতে যেমন, সংখ্যাদের জগতেও সেইরকম। কিছু কিছু সংখ্যা আমাদের অতি পরিচিত। ছোটোবেলাতেই আমরা যেসব সংখ্যাদের নিয়ে কাজ করতে শিখি, তাদের বলে **real number** (বাস্তব সংখ্যা)। এদের মধ্যে যেমন **integer**-রা মানে $1, 2, 3, ...$ বা $0, -1, -2, -3, ...$ ইত্যাদি সংখ্যারা আছে, তেমনি আছে fraction-রা যেমন $\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{100}{63}, ...$ আরো আছে square root, cube root ইত্যাদি (যেমন $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{1956}, ...$) এদের ছাড়াও বিস্তর real number আছে, যেমন π. এদের সকলের পরিচয় পেতে মানুষের বিস্তর সময় লেগেছিল, এবং তার মধ্যে কতবার যে মানুষ ভূত দেখে চম্‌কে উঠেছিল সেটা শুনতেও আজকে হাসি পেয়ে যায়। সে গল্পটা আগে একটু করেই নি, তারপর -1-এর square root-এর প্রসঙ্গে ফিরব।

1.1 Real number-দের সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

একেবারে গোড়ায় মানুষ জেনেছিল $1, 2, 3, ...$ ইত্যাদিদের কথা, যাদের আমরা এখন নাম দিয়েছি **natural number**. কী করে জেনেছিল, বলতে পারি না, কারণ সেটা আজকের কথা নয়, একেবারে প্রস্তর যুগের কথা। দক্ষিণ আফ্রিকার এক গুহার দেয়ালে এই সংখ্যাদের ব্যবহারের প্রথম নিদর্শন পাওয়া গেছে। আন্দাজ করা যায় যে, বিভিন্ন জিনিস গুণতে গিয়েই এদের কথা মানুষের মাথায় এসেছিল। আরেক ধরণের সংখ্যার কথাও প্রস্তর যুগের মানুষেরা জানত, তারা হল **rational number**.। তার কারণ মনে করা হয় দৈর্ঘ্য মাপার প্রয়োজন। কোনো দৈর্ঘ্যকে পা ফেলে ফেলে মাপার জন্য খালি গুণতে পারাই যথেষ্ট। কিন্তু যে দৈর্ঘ্যটা হয় 17 পা, তার অর্ধেককে আর integer দিয়ে প্রকাশ করার জো নেই। সেই জন্যই সে আমলের মানুষ বানিয়েছিল $\frac{17}{2}$-এর মত সংখ্যা।
তারপর শতাব্দীর পর শতাব্দী কাটল। মানুষ সভ্য হল, অর্থাৎ জন্তুজানোয়ারদের হাতে মারা না পড়ে কী করে নিজেদের মধ্যে মারামারি করে মরতে হয়, সেটা শিখে ফেলল। এই দীর্ঘ সময় ধরে নতুন কোনো সংখ্যার প্রয়োজন হয় নি। তাই মানুষের মনে ক্রমশঃ এই ধারণা বদ্ধমূল হয়ে গেছিল যে এইসব সংখ্যার বাইরে আর কোনো সংখ্যা সম্ভবই না। এর পর থেকে যখনই নতুন কোনো সংখ্যার ধারণা এসেছে, তার সঙ্গে জড়িত হয়েছে দ্বিধা সংশয়, ব্যঙ্গ, এমন কি খুনখারাপি পর্যন্ত। এরকম কয়েকটা গল্প বলি--

- যেমন ধরো শূন্যের কথা। কোনো কিছু নেই, সেটা বোঝাতে আবার একটা সংখ্যা লাগবে কেন বাপু? এই ধারণার বশবর্তী হয়ে লোকে প্রথম যুগে শূন্যের প্রবক্তাদের বিস্তর হেনস্থা করেছিল। শূন্য বলে একটা সংখ্যার অস্তিত্ব নাকি প্রাচীনকালের গ্রীকদের কেউ কেউ আন্দাজ করেছিল এইভাবে--

  > একটা রেখার দৈর্ঘ্য আছে। যদি একটা বিন্দু আঁকি, তবে তার দৈর্ঘ্য নেই, অথচ বিন্দুটা দিব্যি চোখে দেখা যায়। সুতরাং বিন্দুটার একটা দৈর্ঘ্য থাকা উচিত। এই দুয়ের বিরোধ মেটাতে গিয়ে তারা বলেছিল "আচ্ছা, বিন্দুটার দৈর্ঘ্যকে বোঝানোর জন্য একটা নতুন সংখ্যা বানানো যাক, যার নাম শূন্য"।

  একইভাবে তারা বলেছিল-- "এক মুহূর্ত" সময়ের দৈর্ঘ্যও হল আসলে শূন্য। অবশ্য সে আমলের গ্রীকরা সকলেই এ ধারণাটা মেনে নেয় নি। অনেকেই এই ধারণাটাকে ব্যঙ্গ করে এইরকম "ধাঁধা" বানিয়েছিল, একটা রেখা বিন্দু দিয়ে দিয়েই তৈরী। বিন্দুদের দৈর্ঘ্য শূন্য। শূন্য যোগ শূন্য আবার শূন্যই হয়। তার মানে যেকোনো রেখারই দৈর্ঘ্য হল শূন্য! আরেকজন বলেছিল, যখন একটা তীর ছোঁড়া হয়, তখন প্রতি মুহূর্তেই তীরটা শূন্য পরিমাণ এগোয়, কারণ মুহূর্তের দৈর্ঘ্য হল শূন্য, তাই শূন্য সময়ে তীরটা শূন্য পরিমাণই এগোবে। অতএব এদের দাবী হল-- শূন্যের অস্তিত্ব থাকলে কোনো তীরই কখনোই এগোত না। শূন্য সংখ্যার সমর্থকরা এর কোনো সদুত্তর দিতে পারে নি। তাই গ্রীসদেশের লোকেরা শূন্যের অস্তিত্ব মেনে নেয় নি। শূন্যের আবিষ্কারের কৃতিত্বটা ভারতের আর্যভট্টকেই দেওয়া হয়। তাঁকেও এইরকম কোনো ব্যঙ্গের সম্মুখীন হতে হয়েছিল কিনা জানিনা।

- গ্রীকরা আরেকটা নতুন ধরণের সংখ্যারও পরিচয় পেয়েছিল। সেটা হল **irrational number**. এবং এখানে ব্যাপারটা খালি ব্যঙ্গতেই থেমে থাকে নি, খুন অবধি গড়িয়েছিল। Pythagoras-এর বিখ্যাত theorem-টা তো জানোই। সেটা

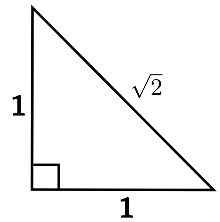


Fig 2

যদি Fig 2-এর উপরে লাগাই, তবে AC-র দৈর্ঘ্য আসবে $\sqrt{2}$, যেটা একটা rational number নয়, মানে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায় না, যেখানে p, q হল integer. এর প্রমাণটা এইরকম--

> ধরো কেউ এমন integer দিতে পারল p আর q, যাতে $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ হয়। উদাহরণস্বরূপ মনে করো কেউ বলেছে $\sqrt{2} = \frac{1414}{1000}$. তুমি প্রথমেই উপরনীচকে যতটা সম্ভব কাটাকাটি করে নেবে। যেমন আমাদের উদাহরণে $\frac{1414}{1000} = \frac{707}{500}$. এইভাবে $\frac{p}{q}$-কে কাটাকাটি করে যেটা পাবে সেটাকে নাম দিলাম ধরো $\frac{p'}{q'}$. যেমন আমাদের উদাহরণে $p' = 707$ আর $q' = 500$. যেহেতু যথাসম্ভব কাটাকাটি করেই এদের পেয়েছি, তাই p' আর q'-এর মধ্যে আর কাটাকাটি হবে না, অর্থাৎ p' এবং q'-এর কোনো common factor-ই নেই (1 বা -1 ছাড়া)। আমরা জানি $\sqrt{2} = \frac{p_1}{q_1}$. এর দু দিককেই square করে পাই $2 = \frac{p_1^2}{q_1^2}$. অতএব $p_1^2 = 2q_1^2$. সুতরাং p_1^2 হল একটা জোড় সংখ্যা। তার মানে p_1-ও একটা জোড় সংখ্যা। এই জায়গাটা বুঝলে তো? কারণ--
>
> > দুটো বিজোড় সংখ্যা গুণ করলে সব সময়ে বিজোড় উত্তরই আসে, তাই p_1 যদি বিজোড় হত, তবে $p_1 \times p_1$ আবার বিজোড়ই আসত।
>
> অতএব $p_1 = 2\times$ কিছু একটা হবে। "কিছু একটা" লিখলে ভালো দেখাচ্ছে না, তাই ওকে একটা ভদ্র নাম দিই, ধরো n. তাহলে $p_1 = 2n$. সুতরাং $p_1^2 = 4n^2$. অতএব $4n^2 = 2q_1^2$, মানে $q_1^2 = 2n^2$. সুতরাং q_1^2-ও দেখা যাচ্ছে জোড়। অতএব q_1-ও জোড়। কিন্তু সেখানেই সমস্যা। p_1 আর q_1 যদি দুজনেই জোড় হবে, তবে তো ওদের মধ্যে আরো কাটাকাটি হতে পারে, কিন্তু আমরা তো যথাসম্ভব কাটাকাটি করেই ওদের পেয়েছিলাম!

তুমি ভাবতে পারো এত কসরৎ করে লাভটা হল কী! একটা সংখ্যা $\frac{p}{q}$ আকারের কিনা, তাতে কার কী আসে যায়? আসলে সে আমলের গ্রীকেরা ভাবত যে যেকোনো দৈর্ঘ্যই $\frac{p}{q}$ আকারের হয় (অর্থাৎ তুমি যাই একক নাও না কেন, যদি তাকে যথেষ্ট ছোটোছোটো ভাগে ভাগ করো (ধরো q-টা ভাগে), তবে তার কিছু ভাগ নিলে (ধরো p-টা ভাগ) যেকোনো দৈর্ঘ্যকেই নির্ভুলভাবে মেপে ফেলা যাবে)। যেহেতু $\sqrt{2}$ সেরকম সংখ্যা নয়, অর্থাৎ এটা এমন আশ্চর্য একটা দৈর্ঘ্য যেটাকে কিছুতেই নিখুঁতভাবে মেপে ফেলা যাবে না, যতই সূক্ষ্ম স্কেল নাও না কেন! এমন বেয়াদব সংখ্যা যে শয়তানের কারসাজি, এ বিষয়ে Pythagoras-এর কুসংস্কারাচ্ছন্ন সাঙ্গোপাঙ্গোদের মনে সন্দেহ ছিল না। এবং সেই কারসাজিটা যে প্রকাশ করেছিল তাকে ওরা হত্যা করেছিল।

- "আমরা এতদিন যা জেনে এসেছি তার বাইরে কোনো সংখ্যা হয় না", এই কুসংস্কার থেকে অতি বিখ্যাত কিছু গণিতজ্ঞও মুক্ত ছিলেন না। প্রাচীন কালের মানুষ $3 - 2 = 1$ বুঝত, কিন্তু $2 - 3 = -1$ বুঝত না, কারণ দুটো জিনিস থেকে আবার তিনটে জিনিস নেব কী করে? প্রাচীন কালের মানুষের না বোঝাটা নাহয় মানা যায়, কিন্তু বললে বিশ্বাস করবে না, যে Rene Descartes (রেনে ডেকার্ট)-এর মত গণিতজ্ঞ (যিনি coordinate geometry-র আবিষ্কর্তা, মানে গ্রাফ আঁকা ব্যাপারটা যার মস্তিষ্কপ্রসূত), তিনি পর্যন্ত মনে করতেন $2 - 3$ হল undefined! সুতরাং তিনি যখন গ্রাফ আঁকতেন সেই গ্রাফে খালি $x \geq 0$ আর $y \geq 0$ দেখানো হত। আরেকজন পৃথিবীবিখ্যাত গণিতজ্ঞ Euler (অয়লার), তিনিও একই ধারণা পোষণ করতেন। ভাবতেও অবাক লাগে যে, real number-দের মধ্যে সবচেয়ে শেষে এসেছে negative সংখ্যারা, irrational-দেরও পরে! অবশ্য আমাদের দেশে ব্রহ্মগুপ্ত শুনেছি অনেক দিন আগেই negative

> সংখ্যাদের নিয়ে কাজ করার নিয়মকানুন লিখে ফেলেছিলেন। সম্ভবতঃ তাঁর লেখাটা ইয়োরোপের পণ্ডিতদের কাছে পৌঁছোয় নি। অবশ্য ভারতের কারো কাছেও মনে হয় পৌঁছোয় নি, কারণ ব্রহ্মগুপ্তের এই কাজটার কথা আমরা জেনেছি নিতান্ত আধুনিক কালে, পাশ্চাত্যদেশের কিছু ঐতিহাসিকের গবেষণার ফলে।

সুতরাং বুঝতেই পারছ অংকের ইতিহাসকে বহুবারই "এমন সংখ্যা হতেই পারে না!"-জাতীয় কুসংস্কারের বাধা টপকাতে হয়েছে। এবং প্রতিবারই সেই বাধা টপকাতে গিয়ে জন্ম হয়েছে নতুন নতুন ধরণের সংখ্যার। এবং প্রতিবারই নতুন ধারণাটার বিরুদ্ধে প্রচুর প্রতিবাদ উঠেছে। এই চিরন্তন কাহিনীর পরবর্তী অধ্যায়টাই হল আমাদের এই বইয়ের গল্প। এর ফলে জন্ম হয়েছিল complex number-দের, যাদের বাংলায় নাম দেওয়া হয়েছে জটিল রাশি। এই জন্মের ইতিহাস বলার আগে এদের মূল বৈশিষ্ট্যটা বলে নিই সংক্ষেপে।
আমরা স্কুলে থাকতে সংখ্যাদের ধর্ম বলতে যা যা শিখি সেগুলো আসলে real number-দের ধর্ম--যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করার পরিচিত নিয়মগুলো, $<$ আর $>$ দিয়ে ছোটোবড়ো বিচার করা, ইত্যাদি। যদি এই ধর্মের তালিকাটা খানিকটা বদলে দিই, অমনি পাবো complex number-দের। এদের ধর্ম প্রায় real number-দের মতই, খালি দুটো জিনিস বাদে--

	Real number	Complex number
মিল	পরিচিত নিয়মগুলো দিয়ে যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ করা যায়। শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না।	
অমিল	এদেরকে $>$ বা $<$ দিয়ে তুলনা করা যায়।	এদেরকে $>$ বা $<$ দিয়ে তুলনা করা যায় না।
	Negative সংখ্যাদের square root বার করা যায় না।	Negative, positive বলে আলাদা কিছু নেই। সব সংখ্যারই square root বার করা যায়।

Complex number-দের জন্ম হল কী করে? সেই প্রশ্নের উত্তরটা বেশ চমকপ্রদ। Complex number-দের নিয়ে অংক শুরু করার আগে সেই গল্পটা একটু না বলে নিলেই নয়। অতএব ফ্ল্যাশব্যাক...[1]

1.2 Complex number-এর জন্মরহস্য

এইবারে শোন্ মোদের কেমনে হয়েছে এই হাল...
--গুপীবাঘার গান

তোমরা হয়তো কবির লড়াইয়ের কথা শুনেছ। অ্যান্টনী ফিরিঙ্গী নামে একটা সিনেমা হয়েছিল কবির লড়াই নিয়ে। এইরকম লড়াই হত দুই কবির মধ্যে। একজন একটা ছোটো কবিতা মুখে মুখে বানিয়ে প্রশ্ন হিসেবে অন্যজনের দিকে ছুঁড়ে দেবে, অন্যজনকে তার উত্তরটা কবিতাতেই দিতে হবে। না পারলেই পরাজয়। তা, আমাদের দেশে যেমন একসময়ে এরকম কবির লড়াইয়ের প্রচলন ছিল, তেমনি অনেক কাল আগে ইটালীতে প্রচলন ছিল অংকের ধাঁধার লড়াইয়ের। রীতিমত সভা করে দুই পক্ষের মধ্যে ধাঁধা যুদ্ধ হত। একপক্ষ একটা ধাঁধা হাঁকল, অন্য পক্ষ যদি তার সমাধান করতে পারল তো ভালো, নইলে পরাজয় মেনে নিতে হবে। তারপর আবার ওই পক্ষের পাল্টা ধাঁধা আসবে। এইভাবে ধরো গোটা তিরিশেক ধাঁধা বিনিময়ের পরে নিষ্পত্তি করা হবে কে জিতল। যে জিতবে তার বেজায় সম্মান, অনেক সময়ে দেশের ধনীরা এসব খেলায় আমোদ পেত, ফলে বিজয়ীর কপালে নাচত মোট পুরস্কার। এই সব সভায় যারা অংশ নিত, তাদের অনেকেরই ক্ষেত্রে এটাই ছিল পেশা। পেশার তাগিদে তারা সর্বদাই চেষ্টায় থাকত কীভাবে নতুন ধাঁধা বানানো যায়, এবং নিজের ধাঁধার সমাধান কিছুতেই তারা ফাঁস করত না।
এমনি এক ধাঁধারু মাথা খাটিয়ে এই ধাঁধাটা বার করেছিলেন-- একটা equation দেওয়া থাকবে $x^3 + px = q$ চেহারার, যেখানে p, q হল যে কোনো দুটো positive integer. এটার অন্ততঃ একটা সমাধান বার করতে হবে।
অবশ্যই বিভিন্ন আসরে তিনি বিভিন্নরকম p, q দিতেন। যেমন কোথাও হয়তো বললেন, এমন একটা সংখ্যা বলো, যাতে তার cube-এর সঙ্গে সেই সংখ্যার তিনগুণ যোগ করলে 6 হয়। এখানে $p = 3$ আর $q = 6$ নেওয়া হয়েছে। তিনি ভিতরে ভিতরে

[1] এই গল্পটা পেয়েছি Paul Nahin-এর লেখা An imaginary tale, the story of $\sqrt{-1}$ বইটা থেকে।

যেকোনো p, q-এর জন্যই সমাধানের একটা general উৎকটগোছের ফর্মুলা বার করে রেখেছিলেন--

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

বইয়ের গোড়াতেই এমন বিচ্ছিরি একটা ফর্মুলা দেখে ঘাবড়ে যেও না যেন। এটা বিচ্ছিরি এবং বার করাটা কঠিন বলেই সেই ধাঁধারুর এটা খুব মনে ধরেছিল। এবং এই কৌশলটা তিনি কাউকে ফাঁস করতেন না। খালি মৃত্যুর আগে এক প্রিয় শিষ্যকে বলে গিয়েছিলেন। শিষ্যটি অংক-টংক তেমন পারত না, এখন কৌশলটা হাতে পেয়ে সে ফূর্তির চোটে আরেক ধাঁধারু Tartaglia-কে চ্যালেঞ্জ জানিয়ে বসল। Tartaglia মানে হল "তোৎলা", মুখের কাছে জখম থাকায় ভদ্রলোক কথা বলার সময়ে তোৎলাতেন, সেই থেকেই তাঁর এই নাম চালু হয়েছিল। কিন্তু যতই তোৎলান, তাঁর অংকের মাথাটি ছিল বড়ই সরেস। সুতরাং তাঁকে চ্যালেঞ্জ জানানো বেশ দুঃসাহসের কাজ! Tartaglia আগে থেকেই জানতেন যে, সেই ধাঁধারু ওই বিশেষ চেহারার equation-টা দিয়ে ধাঁধা বানাতেন। তাঁর অর্বাচীন শিষ্য যখন এত বড় চ্যালেঞ্জ ছুঁড়ে দেবার সাহস করেছে, তার মানে গুরুর কাছ থেকে নিশ্চয়ই কৌশলটা শিখে নিয়েছে। অতএব তিনিও উঠে পড়ে লাগলেন কৌশলটা নিজেই বার করে ফেলতে, এবং অনেক চেষ্টা করে শেষমেশ প্রতিযোগিতার ঠিক এক দিন আগে সফল হলেন। তারপর কী হল আন্দাজ করতেই পারো। তিরিশটা ধাঁধা দুপক্ষ থেকেই দেওয়া হল। অর্বাচীন শিষ্যের প্রতিটা ধাঁধাই ওই একই কায়দার, প্রতিটাই Tartaglia অনায়াসে করে দিলেন। কিন্তু Tartaglia-র একটা ধাঁধাও অন্য পক্ষ করতে পারল না। একেবারে গোহারান হার বলে যাকে! খবরটা ছড়াতে দেরী হল না, এবং অনতিবিলম্বেই উঠল গিয়ে আরেক ধাঁধারুর কানে। এনার নাম Cardano. এই তুখোড়বুদ্ধি মানুষটিকে অবশ্য খালি ধাঁধারু বললে কিছুই বলা হয় না। ইনি একাধারে অংক, ভৌত বিজ্ঞান এবং রসায়নের পণ্ডিত, তেমনি আবার জোতির্বিদও বটেন, আবার পাকা জুয়াড়ি হিসেবেও তাঁর বেজায় নাম (এবং বদনাম)। Probability-র অন্যতম প্রতিষ্ঠাতাও তিনি। এ হেন Cardano খবর পেয়ে এসে Tartaglia-কে ধরে পড়লেন, ওই কৌশলটা তাঁকে শেখাতেই হবে। প্রথমে তো Tartaglia কিছুতেই বলবেন না, কিন্তু অনেক অনুরোধের পরে শেষে বলেই দিলেন। Cardano এবার সাজিয়ে গুছিয়ে ফর্মুলাটার একটা নতুন চেহারাও বার করে ফেললেন। সেটা হল $x^3 = px + q$-এর একটা সমাধান--

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \qquad (*)$$

এমনিতে এর মধ্যে বিরাট নতুন কিছু নেই, খালি আগের equation-এর p-এর জায়গায় $-p$ বসানো। কিন্তু তাতেই বাঁধল একটা বিপত্তি। সেটা বোঝার জন্য একটা জিনিস জানা দরকার-- Cardano আগে একটা মজার ঠকানো ধাঁধা বানিয়েছিলেন, সেটা এইরকম--

> 10-কে এমন দুটো অংশে ভাঙো (মানে এমন x, y নাও যেন $x + y = 10$ হয়), যাতে তাদের গুণফল হয় 40 (অর্থাৎ $xy = 40$ হয়)।

Cardano-র ঠকানো উত্তর ছিল $x = 5 + \sqrt{-15}$ এবং $y = 5 - \sqrt{-15}$. অবশ্যই লোকে হাঁ হাঁ করে বলে উঠত,-- "ওই $\sqrt{-15}$-টার কোনো মানেই হয় না"! Cardano মুচ্‌কি হেসে বলতেন, "মানে না থাকলেই বা কী? আমি তো আর অংকের পরিচিত নিয়মগুলোর বাইরে যাচ্ছি না, যোগ করেই দ্যাখো

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10,$$

কারণ $\sqrt{-15}$ যাই হোক না কেন, যেকোনো সংখ্যা থেকেই নিজেকে বিয়োগ করলে যে 0 হয়, সেটা তো মানবে? আর $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ হয়, সুতরাং

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (-15) = 40.$$

ব্যস্! এর মধ্যে $\sqrt{-15}$ খায় না মাথায় মাখে, এতসব ভাববার দরকারটা কোথায়?" মজা করে এসব বললেও, Cardano নিজেই জানতেন যে এটা নেহাত ফাঁকি হল। আসলে এরকমভাবে 10-কে দুভাগে ভাঙা অসম্ভব। সেই জন্যই negative সংখ্যার square root এসে যায়। Cardano বিশ্বাস করতেন যে, কোনো অংকে negative সংখ্যার square root এসে যাওয়া মানেই হল সেই অংকটার আসলে কোনো উত্তর হয় না।

এবার আবার (*)-এর গল্পে ফিরে আসি। সে আমলে ইটালীতে একজন নামকরা ইঞ্জিনীয়ার ছিলেন, তাঁর নাম Bombelli. তাঁর তৈরী কিছু স্থাপত্য এখনও আছে! ইনি একবার এই অংকটা নিয়ে মাথা ঘামাচ্ছিলেন--

$$x^3 = 15x + 4.$$

অবশ্য খানিকক্ষণ হাতড়ে হাতড়েই এর একটা সমাধানও তিনি করে ফেলেছিলেন, $x = 4$. এই অংকটা দেখেই Cardano ভাবলেন, বাঃ এই তো আমার সেই ফর্মুলাটা লাগাবার পক্ষে একটা খাসা অংক পাওয়া গেছে। এই না বলে তিনি যেই (*)-এ $p = 15$ আর $q = 4$ বসিয়েছেন, অমনি উত্তর পেলেন--

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

দেখে তো তাঁর মাথায় হাত! Negative সংখ্যার square root এসে গেল যে! তার মানে তো equation-টার সমাধান থাকার কথা নয়, কিন্তু দেখাই যাচ্ছে যে $x = 4$ একটা সমাধান হচ্ছে! Cardano জীবদ্দশায় এই রহস্যের কিনারা করে যেতে পারেন নি। সেটা করেছিলেন Bombelli. এবং সেটা করে এমন আশ্চর্য হয়ে গিয়েছিলেন যে, সমাধানের গোড়াতে লিখেছিলেন--

> আমি যা লিখতে চলেছি, তাতে আপনারা আমাকে পাগল ভাবতে পারেন। বস্তুতঃ আমার নিজের কাছেই এটা পাগলামি বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু তাও না বলে পারছি না যে $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$-কে আসলে $2+\sqrt{-1}$ আকারে লেখা যায়[2], এবং একইভাবে $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ হয় $2-\sqrt{-1}$. সুতরাং দুজনকে যোগ করলে ওই $\sqrt{-1}$-টা কেটে যায়, এবং সত্যিই উত্তর আসে 4.

সে আমলে এটা ছিল একটা বিরাট বিস্ময়ের ব্যাপার। এ থেকেই মানুষ প্রথম বুঝতে পারল যে $\sqrt{-1}$-কে "একটা কিছু সংখ্যা" বলে কল্পনা করে সাধারণ অংকের নিয়ম লাগিয়ে গেলেই সঠিক উত্তর পাওয়া যায়। সেই হল complex number-এর শুরু। এবার আমাদের ফ্ল্যাশব্যাক আমরা কিছুক্ষণের জন্য বন্ধ রেখে চট্ করে Bombelli-র কায়দাটা শিখে নিই। কায়দাটা হল negative সংখ্যার square root-দের নিয়ে কাজ করা। Bombelli অবশ্য সেটা আন্দাজে করেছিলেন, আমরা শিখব তারই আধুনিক সংস্করণ। ব্যাপারটা শুরু হবে i নামের একটা নতুন ধরণের সংখ্যা দিয়ে, যার সংজ্ঞা হল $i^2 = -1$. এই i চিহ্নটা অবশ্য Bombelli-র দেওয়া নয়, ওটা দিয়েছিলেন Euler (অয়লার) নামের একজন গণিতজ্ঞ। তবে এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান। আধুনিক যুগে লেখার সময়ে কিন্তু আমরা মোটেই $i = \sqrt{-1}$ লিখি না (যদিও প্রচুর বইতে এবং প্রশ্নপত্রেই এই ভুলটা দেখা যায়), আমরা লিখি $i^2 = -1$. এই দুয়ের সূক্ষ্ম পার্থক্যটা বুঝে নাও--আমরা যখন real number-দের নিয়ে কাজ করি, তখন $3^2 = 9$-এর মানে হল--

$$3 \times 3 = 9,$$

কিন্তু $3 = \sqrt{9}$-এর মানে তার চেয়ে একটু বেশী কিছু--

$$3 \times 3 = 9 \text{ এবং } 3 \geq 0.$$

অর্থাৎ $\sqrt{}$ চিহ্নটা <u>nonnegative</u> square root বোঝায়। কিন্তু complex number-দের বেলায় তো আর $>$ বা $<$-এর গল্প নেই, তাই nonnegative-এরও মানে হয় না। তাই $\sqrt{-1}$ বলতে আধুনিক অংকের ভাষায় বোঝায় দুটো সংখ্যা দিয়ে তৈরী একটা set, মানে $\{-i, i\}$. এই ব্যাপারটা নিয়ে আমরা পরে আরো বিস্তারিত আলোচনা করব। আপাততঃ Bombelli-র কায়দাটা ধাপে ধাপে শেখা যাক।

DAY 2
Complex number-দের নিয়ে অংক করা (প্রথম পর্ব)

[2] চোখ কান বুঁজে $(a+b)^3$-এর ফর্মুলা লাগিয়ে $(2+\sqrt{-1})^3$ বার করলেই $2+\sqrt{-121}$ আসবে।

2.1 প্রথম ধাপ: real আর imaginary অংশ

যেকোনো complex number-কেই দেখতে $x+iy$-এর মত, যেখানে x, y হল real number. যেমন $2+3i$ বা $\frac{1}{3}-2i$ বা $\pi+\sqrt{2}i$ বা $-3+0i$ কিংবা $0+6i$ বা $0+0i$. যদি কোনো অংশ শূন্য হয়, তবে লোকে সাধারণতঃ সেটাকে আর আলাদা করে লেখে না, যেমন $2+0i$-কে লেখে খালি 2 আর $0+2i$-কে লেখে খালি $2i$.
যাবতীয় complex number-এর set-কে $\mathbb{C}$ চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়, ঠিক যেমন যাবতীয় real number-এর set-কে বোঝাতে $\mathbb{R}$ ব্যবহার করা হয়। অতএব আমরা "z একটা complex number" এই কথাটাকে সংক্ষেপে লিখতে পারি "$z \in \mathbb{C}$"।
যদি তোমাকে $z=x+iy$ দিই, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$, তবে x-কে বলব এর **real part**, আর y-কে বলব এর **imaginary part**. সাবধান, imaginary part-টা কিন্তু iy নয়, খালি y. লেখার সময়ে লিখি $\mathrm{Re}(z)=x$ এবং $\mathrm{Im}(z)=y$. বাংলায় real part-কে বলে বাস্তব অংশ, আর imaginary part-কে বলে কাল্পনিক অংশ।
যদি কোনো complex number-এর real অংশটা না থাকে (মানে শূন্য হয়), তবে তাকে বলে **purely imaginary**, যেমন i বা $2i$ বা $-2i$, এইরকম। একইভাবে যদি imaginary অংশটা শূন্য হয়, তবে সেরকম complex number-কে বলব **purely real**, যেমন $1, \frac{1}{2}, -\pi$, ইত্যাদি। Complex number-দের মধ্যে যারা purely real নয় (যেমন $2+3i$ বা $-7i$), তাদের বলে **non-real** complex number.

Exercise 1: একটা ছোট্টো ঠকানো প্রশ্ন। এমন কোনো complex number দিতে পারো যেটা purely imaginary-ও নয়, আবার purely real-ও নয়? আচ্ছা, এমন কোনো complex number কি সম্ভব যেটা একই সঙ্গে purely imaginary এবং purely real? ■

2.2 দ্বিতীয় ধাপ: =

যদি বলি দুটো complex number সমান, তবে বুঝবে যে তাদের real part-গুলো সমান, আবার আলাদা করে imaginary part-গুলোও সমান। সুতরাং complex number-এর একটা "="-এর ভিতরে real number-এর দুটো "=" লুকিয়ে থাকে। একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 1: ধরো $a, b \in \mathbb{R}$ এমন যে $a+ib=a-ib$. তবে তুমি a, b বার করতে পারবে?

SOLUTION: প্রথমে আমরা real আর imaginary অংশদুটোকে আলাদা করে দুটো equation বানিয়ে নিই। যদি real অংশটা নিই, তবে পাব $a=a$. ধ্যাৎ, সেটা তো বলাই বাহুল্য, যেকোনো $a \in \mathbb{R}$-এর জন্যই হয়! এ থেকে কিছু বাড়তি জ্ঞানলাভ করা গেল না। যদি imaginary অংশদুটো নিই, তবে পাব $b=-b$. এ থেকে পেয়ে যাচ্ছি $b=0$. সুতরাং a যা খুশি হতে পারে, তবে $b=0$ হতে বাধ্য। ■

Exercise 2: ধরো $x, y \in \mathbb{R}$. যদি বলে দিই $z=w$, যেখানে $z=2x+y+(x+y)i$ আর $w=x+2yi$, তবে $x, y=?$ ■

2.3 তৃতীয় ধাপ--যোগ, বিয়োগ

Complex number-দের যোগ, বিয়োগের নিয়ম real number-দের মতই। খালি real অংশগুলোকে আলাদা করে যোগ করতে হবে, আর imaginary অংশগুলোকে আলাদা করে। একটা উদাহরণ দেখি।

Example 2: $(2+3i)+(4+5i)=?$

SOLUTION:এখানে real অংশগুলোকে যোগ করে পাই $2+4=6$. একইভাবে imaginary অংশগুলোকে আলাদা করে যোগ করলে হয় $3+5=8$. সুতরাং উত্তর হল $(2+3i)+(4+5i)=6+8i$. ■

Exercise 3: $z=5-3i$ এবং $w=-2+6i$ হলে $z-w$ এবং $w+z$ বার করো। ■

যোগ বিয়োগের পরিচিত ধর্মগুলো সবই এখানেও খাটে, যেমন--

- যোগের উল্টো হল বিয়োগ,
- $z + w$ আর $w + z$ একই হয়,
- শূন্য যোগবিয়োগ করলে কিছু বদলায় না,
- ইত্যাদি।

Example 3: যদি $z \in \mathbb{C}$ এমন হয় যাতে $z + 2 + 3i = 10 - 5i$, তবে $z = ?$

SOLUTION: চাইলে এই অংকটাকে real আর imaginary অংশে ভেঙে করা যায়। সেক্ষেত্রে আমরা $z = x + iy$ ধরে নেব, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে real অংশ থেকে পাব এই equation-টা--

$$x + 2 = 10,$$

আর imaginary অংশ থেকে এটা--

$$y + 3 = -5.$$

এদেরকে সমাধান করলে আসবে $x = 8$ আর $y = -8$. সুতরাং উত্তর হবে $z = 8 - 8i$.
অংকটাকে আরো সংক্ষেপে করা যেত, real আর imaginary অংশে না ভেঙ্গে, যোগ আর বিয়োগ যে পরস্পরের উল্টো সেই কথাটাকে কাজে লাগিয়ে। বলে দিয়েছে যে, $z + 2 + 3i = 10 - 5i$. এ থেকেই এক ধাপে লিখে দিতে পারি

$$z = (10 - 5i) - (2 + 3i) = 8 - 8i.$$

ব্যস্! ■

2.4 চতুর্থ ধাপ--গুণ

গুণের বেলায় খালি মনে রেখো $i^2 = -1$. তাছাড়া বাকি সবই algebra-র গুণের মতই।

Example 4: $(2 + 3i)(1 + 4i) = ?$

SOLUTION: যদি ছোটোবেলায় স্কুলে $(2 + 3x)(1 + 4x)$ বার করতে দিত, তবে যেভাবে এগোতে, এখানেও প্রথমে সেভাবেই এগোব--

$$\begin{aligned}
(2+3i)(1+4i) &= 2 \times 1 + 2 \times 4i + 3i \times 1 + 3i \times 4i \\
&= 2 + 8i + 3i + 12i^2 \\
&= 2 + 11i + 12i^2 \\
&\qquad \text{এবার } i^2 = -1 \text{ ব্যবহার করব।} \\
&= 2 + 11i - 12 \\
&= -10 + 11i.
\end{aligned}$$

■

Exercise 4: নীচের গুণগুলো করো।

1. $(2 + 3i)(1 + 4i)$

2. $\left(\pi+\frac{1}{2}i\right)(2-4i)$

3. $5i(2i-4)$

4. $(2+3i)(2-3i)$.

■

Exercise 5: যদি $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ হয়, তবে $(a+ib)(c+id)$-কে $x+iy$ আকারে লেখো, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Exercise 6: x, y বাস্তব এবং $x+iy=-i(-2+3i)$ হলে (x, y) হল

(A) $(2,-3)$

(B) $(3,2)$

(C) $(-2,3)$

(D) $(-3,-2)$

(HS2013)
HINT:
এখানে একটা লেখার কায়দা ব্যবহার করেছে, যেটা একটু বুঝে নেওয়া দরকার। যদি লিখি $(x, y)=(2,4)$, তার মানে হল $x=2$ এবং $y=4$.
■

আমরা জানি যে, $i^2=-1$. এই ব্যাপারটা বার বার ব্যবহার করে গেলেই পাবে $i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$, তারপর $i^4=i^3\times i=-i\times i=1$, ইত্যাদি। নীচের অংকে এটা কাজে লাগবে।

Exercise 7: What is the real value for a for which $3i^3-2ai^2+(1-a)i+5$ is real? **(CBSE2018-19)**
HINT:
মনে রেখো $i^2=-1$ আর $i^3=-i$. এখানে a-র জায়গায় এমন একটা real সংখ্যা বসাতে হবে, যাতে $3i^3-2ai^2+(1-a)i+5$ একটা real সংখ্যা হয়, মানে এর imaginary অংশটা শূন্য হয়।
■

Exercise 8: $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$-এর মান হল--

(A) 1

(B) -1

(C) 0

(D) কোনোটাই নয়

(HS2014)

HINT:

এখানে $i^{n+2} = i^n \times i^2 = -i^n$. সুতরাং $i^n + i^{n+2} = 0$. বাকিটুকু নিজে করো।

■

Exercise 9: যদি $i^2 = -1$ হয়, তবে $\sum_{n=0}^{225} i^n$-এর মান হবে

(A) 0

(B) $1+i$

(C) -1

(D) i

[1] **(HS2015)**

HINT:

এই summation-টা দেখে ঘাবড়ে যেও না। এর প্রথম কিছু term লিখে ফেলা যাক। প্রতিটা term-ই দেখতে i^n-এর মত যেখানে $n = 0, 1, 2, \ldots$। যদি $n = 0$ বসাও, তবে $i^0 = 1$ পাবে, $n = 1$ আর $n = 2$ বসালে পাবে $i^1 = i$ এবং $i^2 = -1$. এইভাবে প্রথম কয়টা term হবে এইরকম--

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad 1, \quad i, \quad -1, \quad -i, \quad \ldots$$

কোনো প্যাটার্ণ চোখে পড়ছে? প্রথম চারটে, তার পরের চারটে, এইভাবে? Summation-টায় মোট কটা term আছে? ■

নীচের অংকটা JEE (Main) 2019-এর একটা অংকের অনুকরণে। মূল অংকটায় কোনো ছাপার সমস্যা ছিল। তাই সামান্য পরিবর্তন করতে হয়েছে।

Exercise 10: Let $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^2 = \frac{x+iy}{27}$, $(i^2 = -1)$, where x and y are real numbers, then find $y - x$. **(jeemain.2019)** ■

যোগ আর বিয়োগের বেলায় যেমন, গুণের বেলাতেও তেমনি complex number-রা ছোটোবেলায় স্কুলে শেখা পরিচিত ধর্মগুলো মেনে চলে। যেমন--

- zw-কে তুমি চাইলে wz-ও লিখতে পারো,
- এখানেও ব্র্যাকেট তুলে গুণ করা যায়, মানে $z(a+b) = za + zb$ হয়।
- অতএব $(a+b)^2$ বা $(a-b)^2$-এর ফর্মুলাগুলোও সবই complex number-এর বেলাতেও খাটে, এবং $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ হয়। একইভাবে $a^3 + b^3$ এবং $a^3 - b^3$-এর ফর্মুলাগুলোও খাটে।

Example 5: $(2+3i)^2 = ?$

SOLUTION: এই অংকটা অবশ্যই $2+3i$-কে $2+3i$ দিয়ে সরাসরি গুণ করেই করা যায়। কিন্তু চাইলে এখানে আমরা $(a+b)^2$-এর ফর্মুলাও লাগাতে পারি, যেখানে $a = 2$ আর $b = 3i$. তাহলে পাব

$$(2+3i)^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i.$$

■

Exercise 11: বার করো--

1. $(3+4i)^2$
2. $(3-4i)^2$
3. $(3+4i)(3-4i)$
4. $(3+4i)^3$.

■

DAY 3
Complex number-দের নিয়ে অংক করা (দ্বিতীয় পর্ব)

3.1 পঞ্চম ধাপ--ভাগ

Complex number-দের ভাগ করাও real number-দের ভাগ করার মতই। মনে রেখো real number-দের বেলায় ভাগ ছিল গুণের উল্টো। এখানেও তাই, অর্থাৎ z এবং $w(\neq 0)$ দুটো complex number হলে $\frac{z}{w}$ হবে সেই সংখ্যা যাকে w দিয়ে গুণ করলে আবার z ফিরে পাবে। এখানেও real number-দের মতই শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না। তবে এইটুকু বর্ণনা থেকেই চট্ করে বোঝা যায় না যে, কোনো complex number দিয়ে ভাগ কী করে করতে হয়। তার জন্য একটা কৌশল আছে, যেটা আমরা এক্ষুণি শিখব। অবশ্য যে complex number দিয়ে ভাগ করবে, যদি তার imaginary অংশটা 0 হয় (এবং real অংশটা 0 না হয়), তবে কাজটা একেবারেই সহজ, যেমন নীচের উদাহরণে।

Example 6: $2+3i$-কে 4 দিয়ে ভাগ করো।

SOLUTION: এখানে 4 দিয়ে $2+3i$-এর real আর imaginary অংশদুটোকে আলাদা করে ভাগ করলেই হল, অর্থাৎ--

$$\frac{2+3i}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4}i = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

ব্যস্! ■

Exercise 12:

1. $\frac{-4+5i}{6} = ?$
2. $\frac{2\pi+i/5}{\pi^2} = ?$
3. $\frac{(2+5i)^2}{6} = ?$
4. যদি $z = 3+4i$ হয়, তবে $\mathrm{Re}\frac{z}{2} - \mathrm{Im}\frac{z}{3}$ কত?

■

কিন্তু যদি imaginary অংশটা শূন্য না হয়, তবে একটা কৌশল করলে সুবিধা হবে। আগেই বলেছি যে, complex number-দের বেলাতেও $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ সূত্রটা খাটে। সুতরাং যদি $3+4i$-কে $3-4i$ দিয়ে গুণ করো, তবে

পাবে $3^2 - (4i)^2 = 9 - 16i^2 = 9 + -16 \times (-1) = 9 + 16 = 25$. এই ব্যাপারটা কাজে লাগিয়ে আমরা complex number-দের দিয়ে ভাগ করতে পারি। একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে পারবে।

Example 7: $1 + i$-কে $3 + 4i$ দিয়ে ভাগ করো।

SOLUTION:

$$\frac{1+i}{3+4i} = \frac{1+i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$

এটাই হল সেই কৌশল। $3 + 4i$ দিয়ে ভাগ করার জন্য
উপরনীচ দুদিককেই $3 - 4i$ দিয়ে গুণ করা।
এতে নীচের তলায় একটা real number এসে যাবে।

$$= \frac{(1+i) \times (3-4i)}{(3+4i) \times (3-4i)}$$

$$= \cdots = \frac{7-i}{25}$$

মামূলী কিছু ধাপ ... বলে বাদ দিয়ে গেলাম, ওটুকু করে নিও।
এবার যেই নীচের তলায় একটা real number এসে গেল,
এখন আগের উদাহরণটার মত করলেই হবে।

$$= \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i.$$

■

Exercise 13: বার করো--

1. $\frac{1+i}{1-i}$,
2. $\frac{10-2i}{5i}$,
3. $\frac{2i-3}{2+i}$,
4. $\frac{5i}{1-i}$,
5. $\frac{11+2i}{2+11i}$.

■

অবশ্য যদি যে complex number-টা দিয়ে ভাগ করছ, তার real অংশটা 0 হয়, তাহলে আরেকভাবেও ভাগটা করা যায়, এবং সেটা একটু বেশী সহজ হয়। তার জন্য লক্ষ করো $i^2 = -1$. সুতরাং $i(-i) = 1$, মানে $\frac{1}{i} = -i$. অতএব i দিয়ে ভাগ করা আর $-i$ দিয়ে গুণ করা একই ব্যাপার।

Example 8: $\frac{2+3i}{4i} = ?$

SOLUTION: $\frac{2+3i}{4i} = \frac{2+3i}{4} \times \frac{1}{i} = \frac{2+3i}{4} \times (-i) = \frac{3-2i}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$. ■

Exercise 14: $\frac{1}{i} = -i$ ব্যবহার করে বার করো--

1. $\frac{10-2i}{5i}$,
2. $\frac{2i-3}{i}$,
3. $\frac{(2+3i)^2}{-i}$,
4. $\frac{5i-4}{2i}$.

■

Example 9: $\frac{i}{1+i}+\frac{1-i}{2i}$-কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করো। **(HS2012)**

SOLUTION: এখানে ধরে নেব $A, B \in \mathbb{R}$.

> $\frac{i}{1+i}=\frac{i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{i(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{1+i}{2}$.
> **আবার** $\frac{1-i}{2i}=\frac{-i(1-i)}{2}=\frac{-1-i}{2}$.
> **সুতরাং** $\frac{i}{1+i}+\frac{1-i}{2i}=\frac{1+i}{2}+\frac{-1-i}{2}=0+i0$.
> **অতএব** $A=0$ **এবং** $B=0$.

■

Example 10: যদি x, y বাস্তব এবং $x+iy=\frac{25}{3+4i}$ হয়, তবে $x+y$-এর মান নির্ণয় করো। **(HS2010)**

SOLUTION:

> **আমরা জানি যে,** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **এবং** $a+bi=c+di$ **হলে** $a=c$ **আর** $b=d$ **হয়।**
> **এখানে** $x+iy=\frac{25}{3+4i}=\frac{25}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{25(3-4i)}{3^2+4^2}=\frac{25(3-4i)}{25}=3-4i$.
> **অতএব** $x=3$ **এবং** $y=-4$. **তাই** $x+y=-1$.

■

Exercise 15: A value of θ for which $\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ is purely imaginary, is

(A) $\frac{\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

(jeemain.2016)
HINT:
$\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$-কে প্রথমে $x+iy$ আকারে লেখার চেষ্টা করো, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. এটার purely imaginary হওয়ার জন্য দরকার $x = 0$. সেখান থেকে কী শর্ত আসে দ্যাখো। ■

Example 11: Let a, b, x and y be real numbers such that $a - b = 1$ and $y \neq 0$. If the complex number $z = x + iy$ satisfies $Im\left(\frac{az+b}{z+1}\right) = y$, then which of the following is (are) possible value(s) of x?

(A) $-1 + \sqrt{1 - y^2}$

(B) $1 - \sqrt{1 + y^2}$

(C) $1 + \sqrt{1 + y^2}$

(D) $-1 - \sqrt{1 - y^2}$

(jeeadv.p1.2017)
SOLUTION: এই অংকটা সরাসরি কষে গেলেই হবে।

> Here $\frac{az+b}{z+1} = \frac{a(x+iy)+b}{(x+1)+iy}$.
>
> $$\frac{ay(x+1) - y(ax+b)}{(x+1)^2 + y^2} = y.$$

দুদিকেই y আছে। যেহেতু $y \neq 0$ তাও ওটা কাটাকাটি হয়ে যাবে--

> Since $y \neq 0$,
>
> $$\frac{a(x+1) - (ax+b)}{(x+1)^2 + y^2} = 1,$$
>
> or
>
> $$(x+1)^2 + y^2 = a - b = 1.$$
>
> So $(x+1)^2 = 1 - y^2$, or
>
> $$x + 1 = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

সুতরাং উত্তর হবে (A) আর (D). ■

3.2 ষষ্ঠ ধাপ: conjugate

এইবার যে জিনিসটা করতে চলেছি তার জন্য আসলে ভাগের কৌশলটা থেকেই। নীচের তলায় $c + id$ থাকলে ($c, d \in \mathbb{R}$), আমরা উপর নীচ দুইদিককেই $c - id$ দিয়ে গুণ করছিলাম, মনে আছে? ওই $c - id$-কে বলে $c + id$-র **conjugate.** লেখার সময়ে $z \in \mathbb{C}$-এর conjugate-কে লিখি $\bar{z}$.

Example 12: $z = 2 - 3i$ হলে $\bar{z} = ?$

SOLUTION: Imaginary অংশটার চিহ্ন উল্টে দিলেই পেয়ে যাবে $\bar{z} = 2 + 3i$. ■

একই সংখ্যার চিহ্ন পরপর দুবার ওল্টালে আবার গোড়ার চিহ্নটাই ফিরে আসবে। অতএব $\bar{\bar{z}}$ নিলে যে সেই z-ই ফিরে পাবে, সে তো বলাই বাহুল্য।
এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান। নীচের অংকটা সেই নিয়েই।

Example 13: যদি $z \in \mathbb{C}$ আর $w = 3 + iz$ হয়, তবে কি $\bar{w} = 3 - iz$ হবে?

SOLUTION: মনে রেখো, এখানে কিন্তু $z \in \mathbb{C}$, তাই z-টাকে এখানে জোর দিয়ে w-এর imaginary অংশ বলা যাচ্ছে না। তাই $\bar{w}$ কিন্তু $3 - iz$ নাও হতে পারে। যেমন $z = 1 + i$ নিলে $w = 3 + i(1 + i) = 2 + i$ হবে, তাই $\bar{w} = 2 - i$. কিন্তু $3 - iz = 3 - i(1 + i) = 4 - i \neq \bar{w}$. অবশ্য z যদি real হয়, (মানে imaginary অংশটা শূন্য হয়), তবে সত্যিই $\bar{w} = 3 - iz$ হবে। ■

Conjugate-দের নানারকম ধর্ম আছে, যেগুলো জানা থাকা ভালো। নীচের অংকে এদের একটা তালিকা দিলাম।

Exercise 16: প্রমাণ করো যে $w, z \in \mathbb{C}$ এবং $a \in \mathbb{R}$ হলে--

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{-z} = -\bar{z}$
3. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
4. $\bar{a} = a$
5. $\overline{az} = a\bar{z}$
6. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
7. যদি $w \neq 0$ হয়, তবে $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$
8. $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
9. $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

HINT:
প্রমাণ করার জন্য complex number-দের real আর imaginary অংশে ভেঙে নাও, তারপর দুই পাশকেই দলাইমলাই করে দ্যাখো একই জিনিসে এনে ফেলা যায় কিনা। যেমন ধরো প্রথম অংকে আমরা $z = x + iy$ আর $w = r + is$ নেব, যেখানে $x, y, r, s \in \mathbb{R}$. তাহলে বাঁদিকে আছে

$$\overline{z + w} = \overline{x + iy + r + is} = \overline{(x + r) + i(y + s)} = (x + r) - i(y + s).$$

ওদিকে ডানদিকে আছে

$$\bar{z} + \bar{w} = \overline{x + iy} + \overline{r + is} = x - iy + r - is = (x + r) - i(y + s).$$

বাঁদিকেও ঠিক সেটাই ছিল। ব্যস্ প্রমাণ শেষ।
এইভাবে বাকিগুলোও করতে চেষ্টা করো। ■

DAY 4
ছবি দিয়ে বোঝা (আবার ফ্ল্যাশব্যাক!)

Bombelli যখন complex number আবিষ্কার করলেন, তখন খানিকটা চাঞ্চল্যের সৃষ্টি হলেও তারপর বহুদিন পর্যন্ত লোকে আর complex number-কে গুরুত্ব দিয়ে ভাবে নি। তার কারণ হল কোনো সত্যিকারের সমস্যায় complex সংখ্যার কোনো ভূমিকা চোখে পড়ে নি। যেখানেই কোনো বাস্তব জীবনের অংকে negative সংখ্যার square root আসছিল, সেখানেই দেখা যাচ্ছিল যে সমস্যাটার সমাধান আসলে অসম্ভব।
যেমন ধরো নীচের উদাহরণটা।

Example 14: একটা বাস সিগনালে দাঁড়িয়েছিল (Fig 3)। একজন বাস ধরার জন্য পিছন থেকে দৌড়ে আসছে। লোকটার velocity (বেগ) হল v. যখন ও বাসটার থেকে d দূরত্ব পিছনে আছে, ঠিক তখন সিগনাল সবুজ হয়ে গেল, আর বাসটাও a পরিমাণ acceleration (ত্বরণ) নিয়ে এগোতে লাগল। লোকটা বাসটাকে কখন ধরতে পারবে?
SOLUTION: যদি t সময়ে ধরতে পারে, তবে সেই সময়ে বাসটা যাবে $\frac{1}{2}at^2$ দূরত্ব[3] আর লোকটা যাবে vt দূরত্ব। সুতরাং আমাদের দরকার

$$vt = \frac{1}{2}at^2 + d,$$

কারণ লোকটাকে বাড়তি d দূরত্বটাও অতিক্রম করতে হবে।
এটা একটা quadratic equation যেটাকে সমাধান করলে হয়

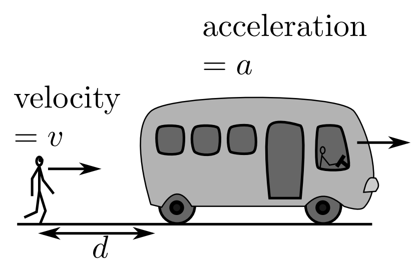
$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2ad}}{a}.$$

যদি $v^2 < 2ad$ হয়, অমনি negative সংখ্যার square root এসে যাবে। আসলে $v^2 < 2ad$ হলে লোকটা কোনোদিনই বাসটাকে ধরতে পারবে না। সুতরাং সেক্ষেত্রে t-এর complex মান কী আসছে, তা নিয়ে লোকের আগ্রহ না জন্মানোই স্বাভাবিক। ■

এমন ব্যাপার দেখে দেখে লোকেরা negative সংখ্যাদের square root-এর উপর একরকম চটেই গেছিল, কোনো অংকে সেরকম কিছু এলেই লোকে দুত্তোর বলে ছেড়ে দিত, উত্তরটার দিকে আর দ্বিতীয়বার তাকিয়ে দেখত না। মনে রেখো, এটা সেই আমল যখন লোকে negative সংখ্যাদের অস্তিত্ব নিয়েও ঘোরতর সন্দেহ পোষণ করত। বস্তুতঃ আমরা যে imaginary শব্দটা ব্যবহার করি, সেটা Descartes-এরই দেওয়া, এবং সেটা অবজ্ঞাসূচকভাবেই, কারণ তিনি মনে করতেন negative সংখ্যাদেরই কোনো গাণিতিক অস্তিত্ব নেই! আর ওই i চিহ্নটা যিনি দিয়েছিলেন, সেই Euler-ও একই কথা বিশ্বাস করতেন!
বিখ্যাত গণিতজ্ঞরা যদি সবাই একই কথা বলতে থাকেন, তবে সেই অবস্থার পরিবর্তনের জন্য স্বভাবতঃই প্রয়োজন হয় কোনো অখ্যাত অগণিতজ্ঞের, যিনি গণিতজ্ঞদের চাপিয়ে দেওয়া ধ্যান-ধারণা দূরে সরিয়ে নিজের মত করে ভাবতে পারেন। আমাদের

[3] এখানে আমরা সেই সূত্রটা লাগালাম--শুরুতে velocity যদি u হয় আর acceleration যদি সব সময়ে a থাকে, তবে t সময়ে displacement (সরণ) হবে $ut + \frac{1}{2}at^2$.

Fig 3



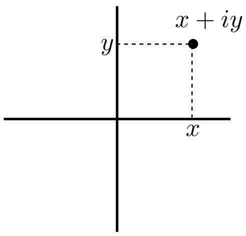


Fig 4

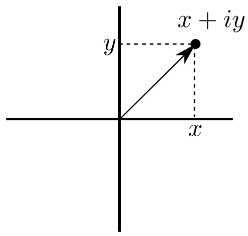


Fig 5

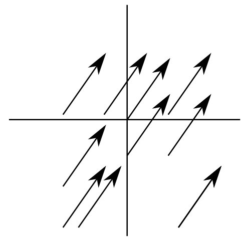


Fig 6

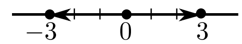


Fig 7

কাহিনীর পরবর্তী নায়ক ঠিক এরকমই এক ভদ্রলোক, পেশা জমিজরীপ, নেশা শখের অংক, নাম Casper Wessel, নিবাস ডেনমার্ক। ওনার কাজ ছিল জমিজরীপ করে ম্যাপ বানানো, তাই ওনার মাথায় একটা নতুন ফন্দি এল-- complex সংখ্যাদের দিয়ে একটা ম্যাপ বানালে হয় না? খানিকটা লড়াই করে ম্যাপ বানাবার একটা কায়দাও বার করে ফেললেন উনি, এবং সেটা মাতৃভাষায় লিখে পাঠিয়ে দিলেন ডেনমার্কের এক গবেষণাকেন্দ্রে। সেই গবেষণাকেন্দ্রে এর আগে কখনো এরকম অগণিতজ্ঞের কাজ ধর্তব্যের মধ্যেই আনা হয় নি। কিন্তু Wessel-এর কাজ দেখে তাঁকে স্বীকৃতি না দেওয়া অসম্ভব। এত সহজ অথচ অসাধারণ সেই ম্যাপ আঁকার কৌশল যে আজও পর্যন্ত আমরা সেই পথেই চলেছি। সেই পথেই মানুষ প্রথম দেখতে পেল complex সংখ্যারা কী জিনিস, এবং তার জন্য কোনো গোঁজা দেবার দরকার পড়ে না।

Wessel-এর সেই কৌশলটাই এবার বলব। আগেই বলেছি Wessel জমি জরীপ করা মানুষ, complex সংখ্যাদের তাই উনি মাটিতে পেড়ে ফেলে বললেন, মনে করা যাক complex সংখ্যারা সবাই জমির উপর আঁকা একেকটা তীরচিহ্ন। Bombelli-র কাজ থেকেই জানা ছিল যে, complex সংখ্যাদের $x + iy$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. সুতরাং সেটাকে (x, y) বিন্দু বলে ভাবাটা শক্ত কিছু নয় (Fig 4)। এবার Wessel বললেন যে--

> origin থেকে সেই বিন্দু পর্যন্ত একটা তীর চিহ্ন আঁকতে হবে (Fig 5)। সুতরাং একটা complex সংখ্যা মানে দাঁড়ালো একটা দৈর্ঘ্য (তীরটা কত লম্বা) এবং একটা অভিমুখ (তীরটা কোনদিকে মুখ করে আছে)। শুধু তাই নয়, তিনি বললেন যে, এখানে তীরটাই গুরুত্বপূর্ণ, তার গোড়াটা origin-এ না থাকলেও চলবে। যতক্ষণ তার দৈর্ঘ্য আর অভিমুখ না বদলাচ্ছে, ততক্ষণ তাকে একই তীর বলে মনে করা হবে। যেমন, Fig 6-এর সবগুলো তীরচিহ্নই একই complex সংখ্যা বোঝাচ্ছে।

Real সংখ্যাদের বেলাতেও কিন্তু ব্যাপারটা একইরকম, খালি সেখানে আমরা একটা সরলরেখা বরাবর কাজ করি, যার পোশাকি নাম number line. সেখানে $+3$ মানে আমরা ভাবতে পারি "ডানদিকে তিন ঘর যাওয়া", আর -3 হল "বাঁদিকে তিন ঘর যাওয়া" (Fig 7)। সেই দিক দিয়ে দেখলে complex number-এর তীরগুলো real number-এর তীরেরই উন্নত সংস্করণ, ওরা খালি একটা লাইন বরাবরই চলতে পারত, আর এরা উত্তর দক্ষিণ পূর্ব পশ্চিম ঈশান বায়ু নৈঋত, যেকোনো দিকেই যেতে পারে (Fig 8)।

এবার real সংখ্যাদের কেমন করে যোগ করতাম, সেটাকে ছবি দিয়ে বোঝা যাক। ধরো বললাম $2 + (-3)$. তার মানে হল প্রথমে ডানদিকে 2 ঘর গিয়ে তারপর সেখান থেকে বাঁদিকে 3 ঘর যাওয়া। ঠিক যেন -3-এর তীরচিহ্নটাকে আমি 2-এর তীরচিহ্নটার পরে জুড়ে দিলাম। সব মিলিয়ে ব্যাপারটা দাঁড়াবে বাঁদিকে 1 ঘর যাওয়া, অর্থাৎ $2 + (-3) = -1$. বোঝার জন্য Fig 9 দেখে নাও। Wessel বললেন, একইরকম ব্যাপার করব complex সংখ্যাদের বেলাতেও। যেমন, $(2+3i)+(-5+i)$

Fig 8

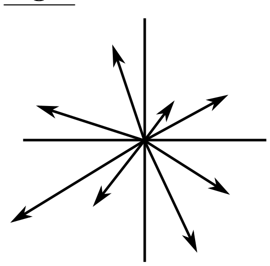


Fig 9

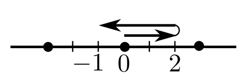




Fig 10

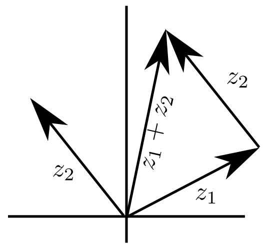


Fig 11

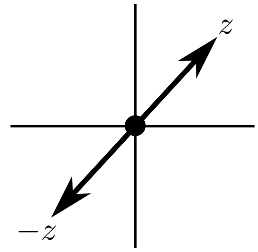


Fig 12

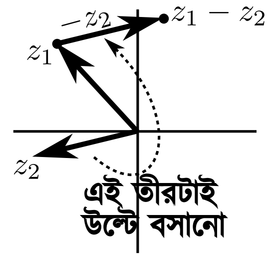


Fig 13

মানে হল origin থেকে শুরু করে প্রথমে $2+3i$-এর তীর চিহ্ন বরাবর যাওয়া, তারপর সেখান থেকে $-5+i$-এর তীরের মত এগোনো (Fig 10)।

অর্থাৎ, in general, যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ হয়, তবে z_1+z_2 ছবি দিয়ে বার করা যাবে এইভাবে--প্রথমে z_1 আর z_2-কে দুটো তীর বলে ভাবো, তারপরে z_2-র তীরটা জুড়ে দাও। এবার যদি প্রথম তীরটার গোড়া থেকে এই দ্বিতীয় তীরটার ডগা পর্যন্ত একটা নতুন তীর কল্পনা করো, সেটাই হবে z_1+z_2-র তীর। Fig 11 দেখে নাও।

বিয়োগের ব্যাপারটাও একইরকম। যদি কোনো complex number-এর আগে মাইনাস বসাতে হয়, তবে তীরচিহ্নটাকে স্রেফ উল্টে দিলেই হবে (Fig 12)। যদি z_1-z_2-কে ছবি দিয়ে ভাবতে চাই, তবে $z_1+(-z_2)$ হিসেবে লিখলে ছবিটা হবে Fig 13-এর মত।

এবার Wessel পড়লেন গুণ করা নিয়ে। আবার সাধারণ সংখ্যাদের গুণের দিকে তাকানো যাক। আমরা জানি $2\times 3=6$ হয়, আবার $2\times(-3)=(-2)\times 3=-6$ এবং $(-2)\times(-3)=6$. অর্থাৎ তীরচিহ্ন দিয়ে ভাবলে, তীরচিহ্নগুলোর দৈর্ঘ্য গুণ হয়ে যায়, আর অভিমুখটা নির্ধারিত হয়, "প্লাসে প্লাসে প্লাস", "প্লাসে মাইনাসে মাইনাস", "মাইনাসে মাইনাসে প্লাস" ইত্যাদি নিয়ম দিয়ে। Wessel এই ধারণাটাকে complex তীর চিহ্নদের বেলায় কীভাবে লাগালেন শোনো। ধরো দুটো complex সংখ্যা আছে z_1 আর z_2, যাদেরকে Fig 14-এর মত তীরচিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি। Wessel বললেন যে, এদের গুণফলটাও একটা তীরচিহ্ন হবে, যেটাকে বার করা যাবে এইভাবে--

> এখানেও তীরচিহ্নদুটোর দৈর্ঘ্য গুণ হবে। আর z_1 এবং z_2 তীর দুটো positive x-axis-এর সঙ্গে যত কোণে হেলে আছে, সেই কোণদুটোকে যোগ করে দিলে যে কোণটা পাওয়া যাবে, গুণফলের তীরটা সেই কোণে হেলে থাকবে।

এবং কি আশ্চর্য, দুটো complex সংখ্যাকে অন্ধের মত $i^2=-1$ ধরে গুণ করলে যা পাওয়া যায়, সেটাও ঠিক তাই। কয়েকটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 15: $(1+i)\times(1-i)$ কত হবে, সেটা দুভাবে বার করো, সরাসরি গুণ করে, এবং Wessel-এ কায়দায়। দ্যাখো একই উত্তর আসছে কিনা।

SOLUTION: সরাসরি গুণ করলে $(1+i)\times(1-i)=1-(-i)^2=2$. Wessel-এর মত ভাবলে দুটো তীরচিহ্ন পাবে Fig 15-এর মত। দুটো তীরেরই দৈর্ঘ্য হল $\sqrt{2}$. একটার বেলায় কোণ হল $45°$, আর অন্যটার বেলায় $-45°$. মনে রেখো positive কোণটা মানে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে। দৈর্ঘ্য দুটো গুণ করলে হয় $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$. আর কোণ দুটো

Fig 14

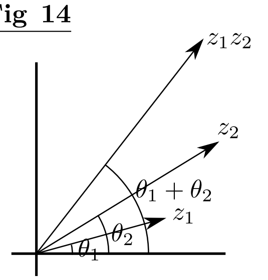
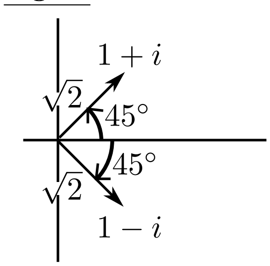


Fig 15



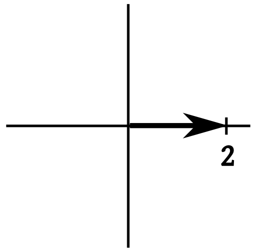


Fig 16

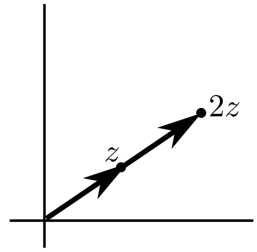


Fig 17

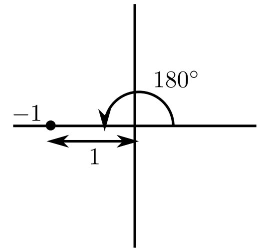


Fig 18

যোগ করলে হয় $45^\circ + (-45^\circ) = 0^\circ$. অতএব গুণ করে যে তীরচিহ্নটা পাচ্ছি, সেটা Fig 16-এর মত। এই তীরচিহ্নটা $2 + 0i$-কে বোঝায়। তাই এক্ষেত্রেও আমরা আসলে একই উত্তর পেলাম। ■

Example 16: যদি একটা complex সংখ্যাকে 2 দিয়ে গুণ করো, তবে কী হবে, সেটা Wessel-এর কায়দায় ভেবে বলো।

SOLUTION:2-কে একটা complex number হিসেবে ভাবলে তার তীরচিহ্নটা হবে Fig 16-এর মত। এর দৈর্ঘ্য 2 আর positive real axis-এর সঙ্গে কোণটা হল 0. সুতরাং এই তীরচিহ্নটা দিয়ে কোনো তীরচিহ্নকে গুণ করলে সেই তীরটার অভিমুখ বদলাবে না, খালি 2 গুণ লম্বা হয়ে যাবে (Fig 17)। ■

Example 17: যদি একটা complex সংখ্যাকে -1 দিয়ে গুণ করো, তবে কী হবে?

SOLUTION:তীরচিহ্ন হিসেবে ভাবলে -1 হল Fig 18-এর মত, modulus হল 1 এবং argument হল 180°. সুতরাং যদি -1 দিয়ে গুণ করো, তবে modulus গুণ হবে 1 দিয়ে, অর্থাৎ তীরটার দৈর্ঘ্য বদলাবে না। কিন্তু argument-এর সঙ্গে π যোগ হয়ে যাবে, মানে তীরের অভিমুখটা উল্টে যাবে। ■

Example 18: যদি i দিয়ে গুণ করো তবে ছবি দিয়ে ভাবলে কীরকম হবে?

SOLUTION: প্রথমে i-এর তীরটা কীরকম হয় ভেবে নাও (Fig 19)। এইটা দিয়ে কোনো তীরকে গুণ করলে তীরটার দৈর্ঘ্য বদলাবে না, খালি অভিমুখটা 90° ঘুরে যাবে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে। যদি গুণটা করতে $-i$ দিয়ে, তবে একই ব্যাপার হত ঘড়ির কাঁটার দিকে। এ সবকিছুরই ছবি রয়েছে Fig 20-এ। ■

সুতরাং Wessel প্রথম দেখালেন যে, complex সংখ্যাদের যোগ এবং গুণ করার জন্য কোনো কারচুপি করতে হয় না, জ্যামিতিকভাবে ভাবলেই হয়। যেমন, এই কায়দায় কোনো complex সংখ্যাকে i দিয়ে গুণ করা মানে আর কিছুই নয়,

Fig 19

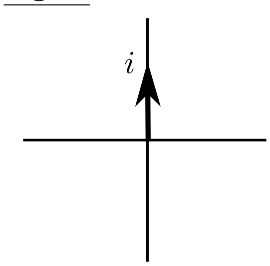
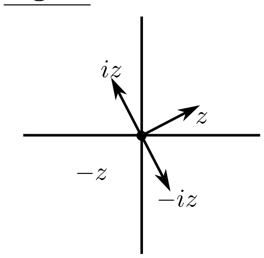


Fig 20



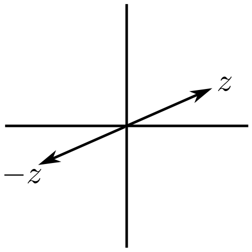


Fig 21

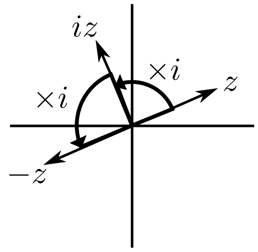


Fig 22

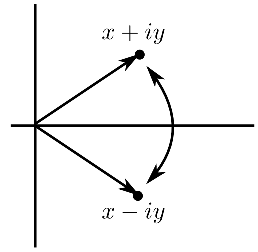


Fig 23

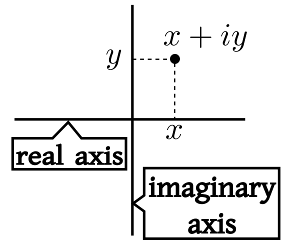


Fig 24

তীরচিহ্নটাকে স্রেফ 90° কোণে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ঘুরিয়ে দেওয়া, ব্যস্! এবার $i^2 = -1$ মানেটাও জলের মত পরিষ্কার--আমরা জানি যে -1 দিয়ে গুণ করলে কোনো তীরচিহ্নের অভিমুখটা উল্টে যায় (Fig 21)। যদি দুবার পরপর 90° ঘোরাও, তাহলেও একই ব্যাপার হতে বাধ্য (Fig 22)।

আমরা conjugate বার করাকেও ছবি দিয়ে ভাবতে পারি। আমরা জানি যে, $x, y \in \mathbb{R}$ হলে $x + iy$-এর conjugate হবে $x - iy$. এবার Fig 23 দেখলেই বুঝবে যে, conjugate বার করা মানে তীরটাকে real axis বরাবর আয়না বসিয়ে প্রতিফলিত করা।

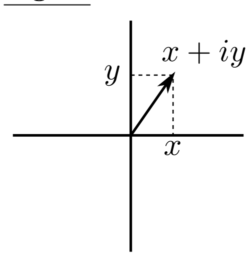
Complex সংখ্যাদের ছবির দিয়ে চিন্তা করার এত সহজ পদ্ধতি আর হয় নি। তাই আজও আমরা এই পদ্ধতি ব্যবহার করি। Complex সংখ্যাদের এই ম্যাপকে নাম দেওয়া হয় **complex plane** বা **Argand plane**. এখানে Argand-এর নামটা আবার কোথা থেকে এল? আসলে দুঃখের কথা যে, Wessel ডেনমার্কের ভিতরে যতই স্বীকৃতি পান না কেন, সে আমলে ডেনমার্কের সঙ্গে বাইরের দেশগুলোর যোগাযোগ খুব কমই ছিল। তাই দেশের বাইরে কেউই Wessel-এর অসামান্য অবদানের কথা জানতে পারে নি। নয় বছর পরে Argand একই জিনিস পুনরাবিষ্কার করেন। সেই থেকে Argand-এর নামটাই বেশী জনপ্রিয় হয়েছে। যাই হোক, বর্তমানে আমরা Argand plane না বলে বেশীরভাগ সময়ে **complex plane** বলতেই ভালোবাসি।

4.1 Complex plane নিয়ে কিছু ভাষা

সব সময়ে ভাববে complex plane-টা যেন একটা গ্রাফ কাগজ। এর উপরের প্রতিটা বিন্দু হল একেকটা complex number. এখানে আমরা $x + iy$-কে (x, y) অবস্থানে একটা বিন্দু হিসেবে ভাবছি $(x, y \in \mathbb{R})$। বোঝার জন্য Fig 24 দ্যাখো। এই হিসেব অনুযায়ী যাবতীয় real number-রা, মানে যাদেরকে $x + 0i$ আকারে লেখা যায়, তাদের দিয়ে তৈরী হবে গ্রাফ কাগজের x-axis-টা। তাই সেটাকে আর x-axis না বলে বলব **real axis.** একইভাবে y-axis-টা জুড়ে থাকবে সব purely imaginary-দের দল, তাই সেই axis-টাকে বলব **imaginary axis.**

বিন্দু হিসেবে ভাবলে যেমন x আর y দুটো real number দিয়ে একটা complex number-কে প্রকাশ করা যায়, তেমনি তীরচিহ্ন হিসেবে ভাবলেও দুটো সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায়, দৈর্ঘ্য আর অভিমুখ। দৈর্ঘ্যটা প্রকাশ করতে খালি একটা সংখ্যা $r \geq 0$ লাগে। অভিমুখটাকে প্রকাশ করব একটা কোণ দিয়ে। কোণটা মাপব positive real axis থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে। দৈর্ঘ্যটাকে বলব **modulus** আর এই কোণটাকে বলব **argument**. লেখার সময়ে z-এর modulus-কে লেখে $|z|$, আর argument-কে লেখে $\arg(z)$. মনে রেখো যে, তীরচিহ্নর গোড়াটা কোথায় সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। কিন্তু লোকে অনেক সময়েই তীরচিহ্নর গোড়াটা origin-এ নেয় (Fig 25), তাহলে তার ডগাটা থাকে ঠিক সেই বিন্দুতে যেটা দিয়ে ওই complex

Fig 25



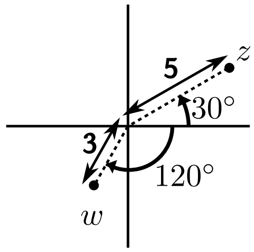


Fig 26

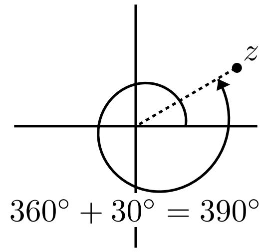


Fig 27

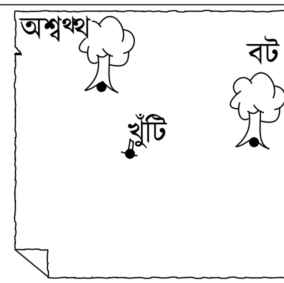


Fig 28

number-কে প্রকাশ করা হয়। এভাবে নিলে complex number-কে প্রকাশের বিন্দু পদ্ধতি আর তীরচিহ্ন পদ্ধতির মধ্যে বেশ একটা সামঞ্জস্যস্থাপন হয়। Modulus আর argument-এর দুটো উদাহরণ রয়েছে Fig 26-এ। এখানে $|z| = 5$ আর $|w| = 3$. আবার z-এর একটা argument হল $30°$, এবং w-এর একটা argument হল $-120°$. এখানে মাইনাস চিহ্নটা লক্ষ করো। ঘড়ির কাঁটার দিকে কোণ মাপলে সেটাকে negative ধরা হয়। এখানে আরেকটা ব্যাপারেও সাবধান, যেহেতু $360°$ ঘুরে এলে ফের আগের জায়গাতেই ফিরে আসা হয়, তাই Fig 26-এ দেখানো z-এর argument আমরা $30°$ না বলে Fig 27-এর মত $360° + 30° = 390°$-ও বলতে পারি। $30° - 360° = -330°$ বললেও আপত্তি নেই। একই complex number-এর এরকম বিভিন্ন argument থাকা নিয়ে বিস্তর সমস্যার সৃষ্টি হয়। সেটা নিয়ে আমরা পরের অধ্যায়ে আলোচনা করব। আপাততঃ জেনে রাখো যে, $0 + i0$ হল একমাত্র complex number, যার কোনো argument হয় না, কারণ ওই তীরটার ল্যাজ-মুড়ো একই বিন্দুতে, তাই কোন্ দিকে যে মুখ করে আছে, সেটা ঠাহরই করা যায় না।

4.2 গুপ্তধনের গল্প

Complex number-দেরকে ছবি দিয়ে ভাবা নিয়ে একটা চমৎকার গল্প প্রচলিত আছে[4]। সেটা বলার লোভ সামলাতে পারছি না। আগেকার দিনে জলদস্যুরা অনেক সম্পত্তি মাটির নীচে গুপ্তধন করে পুঁতে রাখত। পাছে নিজেরাই পরে জায়গাটা ভুলে যায়, সেই জন্য একটা সংকেতও লিখে রাখত। সংকেতটা এমনভাবে লিখত, যাতে অন্য লোকের হাতে পড়লেও সহজে তার পাঠোদ্ধার না করা যায়। রবীন্দ্রনাথের লেখা "গুপ্তধন" বা সত্যজিত রায়ের লেখা ফেলুদার "রয়েল বেঙ্গল রহস্য" যারা পড়েছ, তাদের কাছে এরকম হেঁয়ালি করা সংকেত অপরিচিত নয়। কিন্তু আমাদের গল্পের জলদস্যু তাদের এক কাঠি উপর দিয়ে যায়। তার হেঁয়ালির জট ছাড়াতে অংক লাগে। সংকেতটা এইরকম--

> গুপ্তধনটা আছে প্রশান্ত মহাসাগরের বুকে ... দ্বীপে[5]। সেই দ্বীপে পৌঁছে দেখা যাবে একটা প্রকাণ্ড বট গাছ আছে, আর তার থেকে বেশ কিছুটা দূরে আছে একটা বিশাল অশ্বত্থ গাছ। এবার খানিকক্ষণ খুঁজলেই একটা খুঁটি চোখে পড়বে (Fig 28)। সেখান থেকে পা মেপে মেপে সোজা যেতে হবে অশ্বত্থগাছটা পর্যন্ত (Fig 29), তারপর বাঁদিকে $90°$ ঘুরে গিয়ে যতটা এসেছিলে ফের ততটা যেতে হবে। যেখানে পৌঁছলে সেখানে একটা চিহ্ন দিয়ে রাখো, ধরো A. এবার ফের খুঁটিতে ফিরে যাও। আবার পা মেপে মেপে সোজা রওনা দাও, কিন্তু এবার যাও বট গাছ পর্যন্ত (Fig 30)। সেখানে পৌঁছে ডান দিকে $90°$ ঘুরে যতটা এসেছিলে ততটাই ফের যাও। যেখানে পৌঁছলে তাকে বলো B. তাহলে AB-র ঠিক মধ্যবিন্দুতে খুঁড়লে গুপ্তধন পাবে (Fig 31)।

[4] George Gamow-র লেখা One, two, three, ... infinity বই থেকে পেয়েছি এটা।
[5] আসল নামটা ফাঁস করছি না, পাছে গুপ্তধন নিয়ে কাড়াকাড়ি পড়ে যায়।

Fig 29

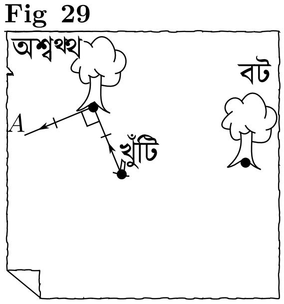


Fig 30

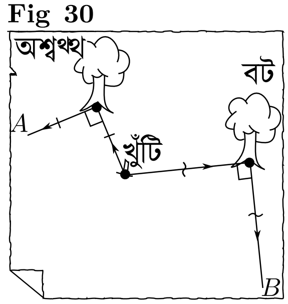
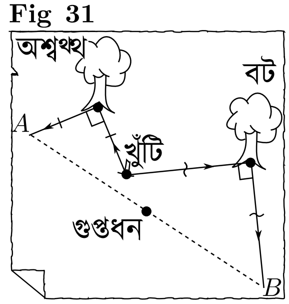


Fig 31



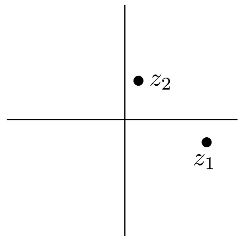


Fig 32

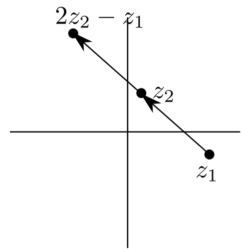


Fig 33

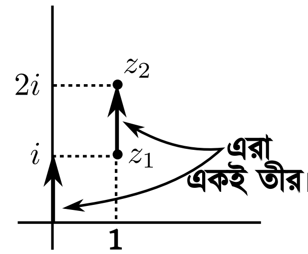


Fig 34

এইটুকুর মধ্যে কোনো হেঁয়ালি নেই। হেঁয়ালিটা হল এই যে, বাস্তবে বট গাছ আর অশ্বত্থ গাছ দুটো থাকলেও খুঁটি-টুঁটি কিচ্ছু নেই। ওটা স্রেফ ভাঁওতা। কিন্তু যে লোক complex সংখ্যা জানবে, সে খুঁটি ছাড়াও ঠিক গুপ্তধনটা বার করতে পারবে। কী করে বলো তো! উত্তরটা এই অধ্যায়ের শেষে দিয়েছি। তবে নিজে বার কয়েক চেষ্টা না করলে মজাটা পাবে না কিন্তু! কিছুই যদি মাথায় না আসে তবে নীচের অংক কয়টা করলে হয়তো চিন্তা করতে সুবিধা হবে।

Example 19: Fig 32-এ দুটো বিন্দু আছে z_1 আর z_2. যদি z_1 থেকে z_2 পর্যন্ত যাও, এবং তারপর একই দিকে ওই একই দূরত্ব আরো যাও, তবে কোথায় পৌঁছবে?

SOLUTION: প্রথমে z_1 থেকে z_2 অব্ধি একটা তীর আঁকো (Fig 33)। সেটা হবে $z_2 - z_1$-র তীরচিহ্ন। এই ব্যাপারটা ভালো করে বুঝে নাও। যেমন--

> $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 1 + 2i$ হলে $z_2 - z_1 = i$ হবে। লক্ষ করো Fig 34-এ z_1 থেকে z_2 অব্ধি আঁকা তীরচিহ্নটা আসলে i-এরই তীরচিহ্ন, কারণ ওর দৈর্ঘ্য 1 এবং ওটা উপর দিকে মুখে করে আছে।

যদি $z_2 - z_1$-এর তীরটাকে সরিয়ে তার গোড়াটা z_2-তে নাও, তবে ডগাটা হবে $z_2 + (z_2 - z_1) = 2z_2 - z_1$, সেটাই উত্তর। ■

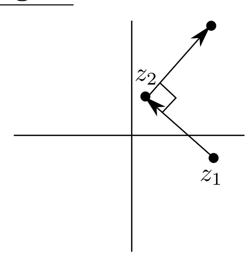
Example 20: আবার Fig 32-র z_1 আর z_2 নাও। যদি z_1 থেকে z_2 পর্যন্ত যাও, এবং তারপর ঘড়ির কাঁটার দিকে 90° ঘুরে ওই একই দূরত্ব আরো যাও, তবে কোথায় পৌঁছবে? Fig 35 দেখে নাও।

> তারপরেতে হঠাৎ বেঁকে ডাইনে মোচড় মেরে
> ফিরবে আবার বাঁয়ের দিকে তিনটে গলি ছেড়ে।
> --ঠিকানা (সুকুমার রায়)

SOLUTION: z_1 থেকে z_2 অব্ধি তীরটা যে $z_2 - z_1$, সে তো আগেই বলেছি। সেটাকে ঘড়ির কাঁটার দিকে 90° ঘোরালে যে তীরটা পাবে, সেটা হল $-i(z_2 - z_1)$. যদি এই তীরটার গোড়াটা z_2-তে নাও, তবে ডগাটা হবে $z_2 - i(z_2 - z_1) = (1 - i)z_2 + iz_1$, সেটাই উত্তর। ■

Example 21: যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ হয়, তবে ওদের মধ্যবিন্দু কী হবে?

Fig 35



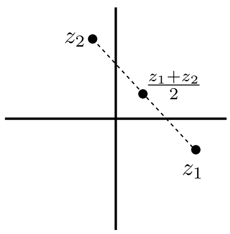


Fig 36

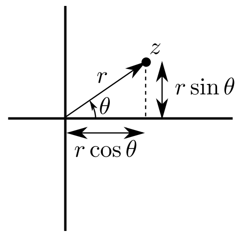


Fig 37

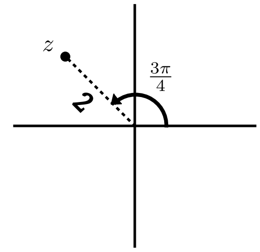


Fig 38

SOLUTION: মধ্যবিন্দু হবে $\frac{z_1+z_2}{2}$. বোঝার জন্য Fig 36 দেখে নাও। ■

Exercise 17: এবার চিন্তা করে বলো, কীভাবে গুপ্তধনটা খুঁজে পাবে তুমি! ■

4.3 Cartesian বনাম polar

কোনো $z \in \mathbb{C}$ দেওয়া থাকলে তাকে দুইভাবে প্রকাশ করা শিখেছি আমরা--

- এক, real আর imaginary অংশ দিয়ে, মানে $x + iy$ আকারে লিখে (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$)। একে বলে **Cartesian** পদ্ধতি।
- দুই, modulus আর argument দিয়ে। একে বলে **polar** পদ্ধতি। অবশ্য এই পদ্ধতিটা $z = 0$-র জন্য খাটে না, কারণ $\arg(0)$ হল undefined.

যদি কোনো complex number-এর polar রূপ দেওয়া থাকে, মানে তার modulus আর একটা argument দেওয়া থাকে, তবে তা থেকে Cartesian রূপটা অতি সহজেই বার করে দেওয়া যায় (Fig 37)। ধরো $|z| = r$ এবং $\arg(z)$-এর একটা মান[6] হল θ. তবে--

$z = x + iy$ হবে, যেখানে $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$. তার মানে $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Example 22: If $|z| = 2$ and $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$, then one of the value of z is

(A) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(B) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(D) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(CBSE2019-20)

SOLUTION:এই অংকটা ছবি আঁকলেই সবচেয়ে সহজে হবে (Fig 38)। অবশ্য এখানে "one of the value" বলার কোনো মানে হয় না। Modulus এবং argument দুটোই বলে দিলে z-এর একটাই value হতে পারে। যেহেতু $\frac{3\pi}{4}$ হল $\frac{\pi}{2}$-এর চেয়ে বড় আর π-এর চেয়ে ছোটো, তাই z পড়ছে দ্বিতীয় quadrant-এ। এখানে যা যা option দিয়েছে, তাদের মধ্যে খালি (B)-টাই ওই quadrant-এ আছে। অতএব আর কিছু না করেই উত্তর বলে দেওয়া যাচ্ছে। অবশ্য যদি পুরোটা

[6] এখানে একটা মান বললাম, কারণ θ যদি argument হয়, হবে $\theta + 360°$ বা $\theta + 720°$ ইত্যাদিরাও তাই।

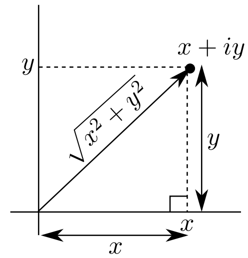


Fig 39

কষে বার করতে চাও, তবে $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) *$. ■

এবার উল্টোদিকটা দেখি। যদি Cartesian রূপটা দেওয়া থাকে, মানে z-কে $x+iy$ আকারে দেওয়া থাকে, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$, তবে তা থেকে $|z|$ বার করায় কোনোই সমস্যা নেই, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. একবার Fig 39 দেখলেই বুঝবে যে এর পিছনে Pythagoras' theorem কাজ করছে।
দুঃখের বিষয়, argument বার করার কায়দাটা তত সহজ নয়। সেটা আমরা পরের অধ্যায়ে শিখব।

DAY 5
পাঁচমিশালী অংক

আজকে আমরা কিছু অংক দেখব, যেগুলো করতে complex সংখ্যা নিয়ে কাজ করতে পারা ছাড়াও আরো কিছু জিনিস লাগবে, সেগুলোও তোমরা +2 level-এই শেখার কথা। কিন্তু হয়তো তাদের সবগুলো তোমার এখনই শেখা হয় নি। সেই সেই জিনিসগুলো আপাততঃ বাদ দিয়ে যাও। পরে শিখে এসে আবার পড়ে নিও।

5.1 Matrix theory

প্রথমে কয়েকটা অংকটা দেব, তাদের জন্য matrix-এর গুণ লাগবে। যদি সেটা জানো না, তারা পরের অংকে চলে যাও। আর যারা matrix-এর গুণের নিয়মটা জানো, তাদের পক্ষে একটা জিনিস মাথায় রাখলে সুবিধা হবে। একটা matrix-কে আমরা **upper triangular** বলি যদি তার diagonal-এর নীচের যাবতীয় entry শূন্য হয় (diagonal-এর entry বা তার উপরের entry-গুলো যা খুশি হতে পারে)। কয়েকটা উদাহরণ এরকম--

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

যদি এরকম দুটো matrix-কে গুণ করো, তবে তাদের গুণফলটাও ফের upper triangular হতে বাধ্য! শুধু তাই নয়, ওদের diagonal entry-গুলো পরস্পর গুণ হয়ে যায়। যেমন, এখানে A-র diagonal entry-গুলো হল $1, 4, 6$. আবার B-এর diagonal entry-রা হচ্ছে $0, 4, 16$. সুতরাং AB হবে একটা upper triangular matrix, যার diagonal entry-গুলো $1 \times 0 = 0,\ 4 \times 4 = 16$ এবং $6 \times 16 = 96$. বিশ্বাস না হয়, গুণটা করেই দ্যাখো।
Upper triangular matrix-দের এই ধর্ম থেকে আরেকটা জিনিসও পাওয়া যায়--যদি A একটা upper triangular matrix হয়, তবে যেকোনো $n = 1, 2, 3, \ldots$-র জন্যই A^n-ও upper triangular হবে, এবং এর diagonal entry-গুলো হবে A-র diagonal entry-গুলোর n-th power. যেমন, এক্ষুণি যে A-টা দিলাম, তার জন্য A^{100}-এর diagonal entry-গুলো হবে 1^{100}, 4^{100} এবং 6^{100}.
এই জিনিসটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা পড়ো।

Example 23: If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ and $A^{2018} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, then $a + d$ equals

(A) $1+i$

(B) 0

(C) 2

(D) 2018.

(ISI2018)
SOLUTION: Upper triangular matrix-দের যে ধর্মটার কথা বললাম, তা থেকেই পাচ্ছি $a = 1^{2018} = 1$ এবং $d = i^{2018} = (i^2)^{1009} = (-1)^{1009} = -1$. সুতরাং $a+d = 0$. তাই উত্তর হবে (B). ■

Upper triangular matrix-দের যে ধর্মটা বললাম (মানে ওদের গুণ করলে ফের upper triangular matrix-ই পাওয়া যায়, এবং diagonal entry-গুলো গুণ হয়ে যায়), সেটা lower triangular matrix-দের জন্যও খাটে। অতএব এই অংকটার কায়দায় নীচের অংকটাও ঘায়েল হবে।

Exercise 18: If $A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 2+3i & i \end{bmatrix}$ and $A^{2018} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, then find $a+d$. ■

এবারের অংকটাতেও matrix-এর ধারণা লাগবে, বিশেষ করে **determinant**-এর ধারণাটা।

Example 24: The set of complex numbers z satisfying the equation

$$(3+7i)z + (10-2i)\bar{z} + 100 = 0$$

represents, in the complex plane,

(A) a straight line

(B) a pair of intersecting straight lines

(C) a pair of distinct, parallel straight lines

(D) a point

(ISI2016)
SOLUTION: ধরে নিই $z = x+iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে--

$$(3+7i)(x+iy) + (10-2i)(x-iy) + 100 = 0.$$

এর real এবং imaginary অংশ আলাদা করে দুটো equation পাচ্ছি--

$$\begin{aligned} 13x - 9y &= -10 \\ 5x - 7y &= 0. \end{aligned}$$

এর একটাই সমাধান। তার মানে ঠিক একটা $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই equation-টা পালিত হবে। তাই উত্তর হবে (D).
কী করে বুঝলাম যে এর ঠিক একটাই সমাধান? সেটা বোঝার একটা পদ্ধতি হল সমাধান করে দেখা। কিন্তু যেহেতু সমাধানটা আমাদের দরকার নেই, তাই ও পথে গেলে অযথা বেশী পরিশ্রম। তার চাইতে আমরা determinant ব্যবহার করতে পারি। প্রথমে equation দুটোকে matrix দিয়ে লিখে নাও--

$$\begin{bmatrix} 13 & -9 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

এর ঠিক একটাই সমাধান থাকবে যদি ওই $\begin{bmatrix} 13 & -9 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$-এর determinant-টা nonzero হয়[7]। এখানে determinant-টা হল $13 \times (-7) - (-9) \times 5 \neq 0$. সেই জন্যই বলতে পেরেছিলাম যে, ঠিক একটাই সমাধান থাকবে। ■

এবার তোমার জন্য একইরকম একটা অংক।

Exercise 19: The set of complex numbers z satisfying the equation

$$z + i\bar{z} + 1 + i = 0$$

represents, in the complex plane,

(A) a straight line

(B) a pair of intersecting straight lines

(C) a pair of distinct, parallel straight lines

(D) a point

■

Exercise 20: Let s, t, r be non-zero complex numbers and L be the set of solutions $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$) of the equation $sz + t\bar{z} + r = 0$, where $\bar{z} = x - iy$. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE?

(A) If L has exactly one element, then $|s| \neq |t|$

(B) If $|s| = |t|$, then L has infinitely many elements.

(C) The number of elements in $L \cap \{z : |z - 1 + i| = 5\}$ is at most 2.

(D) If L has more than one element, then L has infinitely many elements.

(jeeadv.p2.2018)

HINT:

এখানে একটা equation দিয়েছে $sz + t\bar{z} + r = 0$. এর মধ্যে s, t এবং r জানা, আর z হল অজানা। মনে রেখো, একটা complex number-এর পেটে দুটো real number থাকে। তাই real number দিয়ে ভাবলে এখানে অজানা হল দুটো সংখ্যা, x আর y. একইভাবে equation-ও আসলে দুটো। বোঝার জন্য ধরো $s = s_1 + is_2$, $t = t_1 + it_2$ এবং $r = r_1 + ir_2$, যেখানে s_1, s_2 ইত্যাদিরা সকলেই real. তবে $sz + t\bar{z} + r = 0$ মানে হল

$$(s_1 + is_2)(x + iy) + (t_1 + it_2)(x - iy) = r_1 + ir_2.$$

এর real এবং imaginary অংশ আলাদা করলে পাবে--

$$\begin{aligned} (s_1 + t_1)x - (s_2 + t_2)y &= r_1, \\ (s_2 + t_2)x + (s_1 + t_1)y &= r_2. \end{aligned}$$

এবার ব্যাপারটাকে ছবি দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে। ধরো প্রথম equation-টা। যদি এমন হয় যে, x আর y দুজনেরই coefficient শূন্য হয়ে গেল, কিন্তু $r_1 \neq 0$, তবে গল্পের সেখানেই ইতি। এমন কোনো x, y থাকতেই পারে না, তাই $L = \phi$. একই কথা বলা যায় দ্বিতীয় equation-টার সম্পর্কেও। যদি এই সমস্যা না হয়, তবে দুটো equation-ই একেকটা সরলরেখা দেবে, এবং L হবে সেই সব বিন্দু নিয়ে তৈরী, যারা এই দুটো সরলরেখাতেই আছে। এবার তিনটে কেস হতে পারে--

[7] এটা matrix theory-র একটা সূত্র।

- যদি সরলরেখা দুটো একই হয়, তবে L-ও হবে সেই সরলরেখাটাই।
- যদি ওরা parallel (সমান্তরাল) না হয়, তবে সরলরেখা দুটো ঠিক একটা বিন্দুতেই ছেদ করবে, সুতরাং L-এ খালি একটাই বিন্দু থাকবে।
- আর যদি সরলরেখাদুটো পরস্পরের সঙ্গে সমান্তরাল হয় (কিন্তু একই সরলরেখা না হয়), তবে ওরা পরস্পরকে ছেদই করবে না, তাই সেক্ষেত্রে $L = \phi$ হবে।

সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো এই, হয় $L = \phi$, নয়তো L ঠিক একটাই বিন্দু, আর নয়তো L-এর অসংখ্য বিন্দু আছে যারা মিলে একটা সরলরেখা তৈরী হয়। যারা theory of linear equation জানো, তারা এই ব্যাপারটা আগে থেকেই জানো। এটুকু থেকেই বলতে পারা উচিত (D)-টা ঠিক হবে কি না হবে না।
লক্ষ করো, $\{z \ : \ |z-1+i| = 5\}$ হল একটা circle-এর equation. জানো নিশ্চয়ই যে, একটা সরলরেখা একটা circle-কে বড়জোর দুটো বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। সুতরাং (C)-এর ভাগ্যও নির্ধারিত হয়ে গেল।
মনে রেখো L-এর মধ্যে infinitely many elements থাকা মানে L একটা সরলরেখা, এবং সেটা হবে একমাত্র তখনই যখন equation দুটো দুজনেই একই সরলরেখা দেবে। তার জন্য খালি s এবং t-এর উপরে শর্ত চাপানোই যথেষ্ট নয়, r-এর উপরেও শর্ত চাই। সুতরাং (B)-এর বিষয়ে কী মনে হচ্ছে?
■

5.2 Quadratic equation

এর পরের অংকটার জন্য তোমাকে **quadratic equation** (দ্বিঘাত সমীকরণ)-এর বিষয়ে একটা জিনিস জানতে হবে। এদের চেহারা হয় $ax^2 + bx + c = 0$-এর মত। এখানে a, b, c প্রত্যেকেই complex number. যদি x-এর কোনো complex value-র জন্য এই equation-টা পালিত হয়, তবে সেই value-কে বলে equation-টার একটা **root** (বীজ)। যেকোনো quadratic equation-এরই দুটো root থাকে, যেমন $2x^2 - 10x + 12 = 0$-কে $2(x-2)(x-3) = 0$ আকারে লেখা যায়, তাই root দুটো হল $x = 2$ আর $x = 3$. কোনো কোনো ক্ষেত্রে অবশ্য root দুটো সমান হয়ে যেতে পারে, যেমন $x^2 - 2x + 1 = 0$ মানে $(x-1)^2 = 0$, তাই দুটো root-ই এখানে 1.
এবার quadratic equation-এর root-দের একটা ধর্ম বলি--যদি দুটো root হয় p আর q, তবে $p + q = -\frac{b}{a}$ এবং $pq = \frac{c}{a}$ হতে বাধ্য। এমনটা কেন হয়, সেটা দেখা যায় এইভাবে--

> যেহেতু root দুটো p আর q, তাই quadratic-টা নিশ্চয়ই $r(x-p)(x-q)$ আকারের দেখতে। ব্র্যাকেট তুলে গুণ করলে পাবে $rx^2 - r(p+q)x + rpq$. এর সঙ্গে $ax^2 + bx + c$-এর তুলনা করলেই দেখবে $r = a$, $-r(p+q) = b$ এবং $rpq = c$ আসছে। এ থেকেই পেয়ে যাবে $p + q = -\frac{b}{a}$ এবং $pq = \frac{c}{a}$.

এই যুক্তিটা তোমরা হয়তো স্কুলে আগেই শিখেছ, real number-দের বেলায়। যেহেতু এখানে খালি যোগ বিয়োগ গুণ ব্যবহার করা হয়েছে, কোনো $<$ বা $>$ ব্যবহার করা হয় নি, তাই complex number-দের বেলাতেও একই যুক্তি খাটবে।

Example 25: $(2+3i)x^2 - bx + (3-i) = 0$ সমীকরণের একটি বীজ $(2-i)$ হলে অপর বীজ ও b-এর মান নির্ণয় করো।[5] **(HS2019)**

SOLUTION:

ধরা যাক অন্য বীজটা z. তাহলে দ্বিঘাত সমীকরণের সূত্র অনুসারে

$$z + (2-i) = \frac{b}{2+3i} \quad \textbf{এবং} \quad z(2-i) = \frac{3-i}{2+3i}.$$

সুতরাং

$$z = \cdots = \frac{17-19i}{65}.$$

অতএব $b = \frac{21}{5}(2+i)$.

■

একইরকম একটা অংক এবার তোমার করার জন্য।

Exercise 21: যদি $2+i$ হয় $x^2 - 2ix + c = 0$-এর একটা সমাধান (যেখানে $c \in \mathbb{C}$) তবে অন্য সমাধানটা কী হবে? আর c-ই বা কী হবে? ■

5.3 Right angle

এবারের অংকটার জন্য নতুন কিছু জানতে হবে না, কিন্তু ছবি দিয়ে করার একটা প্যাঁচ আছে। যদি দুটো complex number থাকে z আর w (দুজনেই nonzero), যাতে $\frac{z}{w}$ হয় purely imaginary, তবে তীরচিহ্ন হিসেবে ভাবলে ওদের তীর দুটো পরস্পরের সঙ্গে right angle-এ (মানে সমকোণে) থাকবে। এবং এর উল্টো দিকটাও সত্য, মানে right angle-এ থাকলে $\frac{z}{w}$ অবশ্যই purely imaginary হবে।

Example 26: Let z be a nonzero complex number such that $\frac{z}{1+z}$ is purely imaginary. Then

(A) z is neither real, nor purely imaginary.

(B) z is real.

(C) z is purely imaginary.

(D) none of the above.

(ISI2015)
SOLUTION: এখানে $z \neq 0$ বলে দিয়েছে, কিন্তু সেই সঙ্গে $z \neq 1$-ও বলে দেওয়া উচিত ছিল, কারণ $z = 1$ হয়ে গেলে আর $z - 1$ দিয়ে ভাগ করছি কী করে?
যাই হোক, এই অংকটা দুভাবে করব। এক, লিখে লিখে, আর দুই, ছবি দিয়ে চিন্তা করে।
প্রথম কায়দায় $z = x + iy$ নিয়ে শুরু করো, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে

$$\frac{z}{z+1} = \frac{x+iy}{x+1+iy}.$$

ভাগ করার কৌশলটা কাজে লাগিয়ে লিখে পারি--

$$\frac{z}{z+1} = \frac{(x+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} = \frac{(x+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}.$$

নীচের তলায় খালি একটা real number আছে, তাই $\frac{z}{z+1}$-টা purely imaginary হওয়া মানে $(x+iy)(x+1-iy)$-এর real অংশটা শূন্য হওয়া, অর্থাৎ $x(x+1)+y^2 = 0$. $(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. এটা একটা circle-এর equation, যার centre হল $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং radius হল $\frac{1}{2}$. দেখতে Fig 40-এর মত। আমাদের z-কে থাকতে হবে এর পরিধির উপরে। অবশ্য দুটো বিন্দু আছে, যেখানে z থাকতে পারে না, 0 আর -1. পরিধিটার বাকি যে অংশ পড়ে রইল, সেটা real axis বা imaginary axis-কে ছেদ বা স্পর্শ করছে না কোথাও, তাই উত্তর হল (A).

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

এবার আমরা ছবি দিয়ে চিন্তা করার কায়দাটা শিখব। এটা লিখে বোঝানো একটু শক্ত, কিন্তু ধাঁ করে চিন্তা করে ফেলার পক্ষে ভালো। এর জন্য দুটো জিনিস মনে রাখতে হবে--

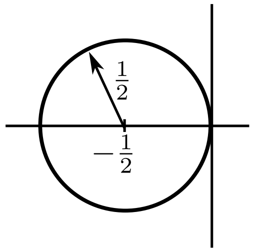


Fig 40

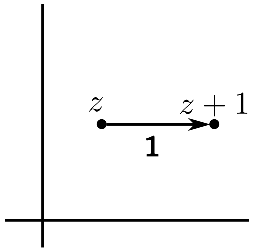


Fig 41

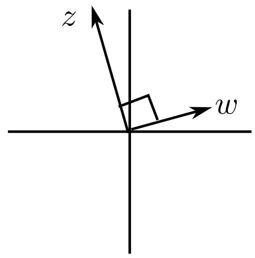


Fig 42

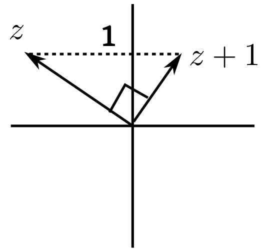


Fig 43

- এক, z যাই বিন্দু হোক, $z+1$ পাবে সেটাকে ডানদিকে 1 ঘর সরিয়ে (Fig 41)।
- দুই, z/w-টা purely imaginary হওয়া মানে হল z আর w-এর তীরচিহ্ন দুটো পরস্পরের সঙ্গে $90°$-তে আছে (Fig 42)।

সুতরাং $\frac{z}{z+1}$-কে purely imaginary হতে হলে ছবিটা Fig 43-এর মত হতে হবে। মনে মনে ছবিতে z বিন্দুটা খানিকক্ষণ নাড়াচাড়া করলেই বুঝবে যে, z-টা axis দুটোর উপরে কোথাও থাকলে এটা সম্ভব নয়। অতএব উত্তর হবে (A). ■

জ্যামিতির অনেক অংকেই right angle-এর গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা থাকে। সেগুলোকে অনেক সময়েই purely imaginary-র প্যাঁচ দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

Exercise 22: যদি $z, w \in \mathbb{C}$ এমন হয় যে, $\frac{z}{w}$ হল purely imaginary, তবে এমন একটা $c \in \mathbb{C}$ বার করো (z আর w ব্যবহার করে), যাতে $|c| = |c - z| = |c - z - w|$ হয়। ■

নীচের অংকটা ছবি দিয়ে ভাবো। কোথাও কোনো right angle দেখতে পাচ্ছ?

Exercise 23: দেওয়া আছে $z \neq \pm 1$. যদি $|z| = 1$ হয়, এবং $w = \frac{z-1}{z+1}$ হয়, তবে $w + \bar{w} = ?$
■

Exercise 24: If $\frac{z-\alpha}{z+\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ is a purely imaginary number and $|z| = 2$, then a value of α is:

(A) 1

(B) 2

(C) $\sqrt{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(jeemain.2019)

HINT:
এই অংকটা অবশ্যই এমনিতেই করা যায়, $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ধরে। কিন্তু সেটা বেশ সময়সাপেক্ষ। বিশেষতঃ যেটুকু তথ্য দিয়েছে তা থেকে x, y সম্পূর্ণ বার করাও যাবে না। কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে ধাঁ করে হয়ে যাবে। একটু ধরিয়ে দিচ্ছি। $z - \alpha$ এবং $z + \alpha$ দুজনকেই যদি origin থেকে তীরচিহ্ন বলে ভাবো তবে ওদের মধ্যে কোণটা হবে $90°$ আর ওদের ডগা দুটো থাকবে একই horizontal লাইনের উপরে (সাবধান, α কিন্তু একটা real number!)। ওদের দূরত্ব হবে $2|\alpha|$. এবার এরকম এক জোড়া তীরচিহ্ন আঁকার চেষ্টা করো দেখি, দুজনেরই গোড়া origin-এ, ডগা একই horizontal লাইনে। ওদের ডগা দুটোর ঠিক মধ্যবিন্দুটা হবে z. সেটা origin থেকে 2 দূরত্বে আছে। উত্তরটা ছবি দেখেই বলতে পারা উচিত।

চেষ্টা করো। ■

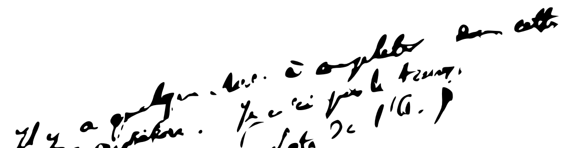
Exercise 25: আগের অংকে খালি α-র <u>একটা</u> value বার করতে বলেছিল। যদি <u>সবগুলো</u> value বার করতে বলত? ■

DAY 6
দুটো মজার জিনিস

দুটো মজার জিনিসের কথা বলে এই অধ্যায়ের ইতি টানি। এইগুলো পড়ে পরীক্ষায় নম্বর পাওয়ার কোনো সুবিধা হবে না। সুতরাং যাদের মাথার উপর পরীক্ষার খাঁড়া ঝুলছে, তারা চাইলে আজকের দিনের পড়াটা বাদ দিয়ে যেতে পারো।

6.1 এক মাথাগরম তরুণের গল্প

আমরা complex number-দের যে ইতিহাসটুকু বলেছি, তাতে পুরো ব্যাপারটাই কেমন যেন নড়বড়ে বলে মনে হতে পারে। Bombelli যেটা আবিষ্কার করে ফেলেছিলেন, সেটা তাঁর নিজের কাছেও এক ধরণের গোঁজা বলেই মনে হয়েছিল। Wessel সেই গোঁজার পিছনে একটা জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়েছিলেন। কিন্তু সেটাও ছিল কেমন যেন কৃত্রিমভাবে চাপানো, গোঁজাটাকে কোনোভাবে মিলিয়ে দেবার চেষ্টা। Complex number-দের জন্ম এইভাবে হয়ে থাকলেও, আজ কিন্তু অংকের জগতে complex number-রা অন্য একভাবে সুপ্রতিষ্ঠিত। এবং তার পিছনে পরোক্ষভাবে অসামান্য অবদান এক মাথাগরম তরুণের। তরুণই বললাম, কারণ মাত্র একুশ বছর বয়সেই যে মারা গিয়েছে, তাকে তরুণ ছাড়া আর কীই বা বলা যায়? আর মাথাগরম না হলে কেউ খামোখা পিস্তল চালানো ভালোরকম না জেনে ডুয়েল লড়তে যায়? ডুয়েল কাকে বলে জানো তো? ধরো তোমাকে কেউ আপত্তিকর কিছু বলল, অমনি তুমি ক্ষেপে গিয়ে তাকে দ্বন্দ্বযুদ্ধে আহ্বান করে বসলে। যে সে দ্বন্দ্বযুদ্ধ নয়, একেবারে শেষ দেখে ছাড়বে। একজনকে মরতেই হবে। সেইরকম দ্বন্দ্বযুদ্ধকেই বলে ডুয়েল। সে আমলে ফ্রান্সে এরকম ডুয়েল হরদম লেগেই থাকত। তা, আমাদের মাথাগরম তরুণটিকে তার প্রাক্তন প্রেমিকার বিষয়ে কেউ কিছু একটা বেচাল বলে ফেলেছিল। ব্যস্, আর যায় কোথায়, বার করো পিস্তল, ডুয়েল লড়ে ফয়সালা হবে! এদিকে আমাদের তরুণ নায়কের মাথাটা অংকের ব্যাপারে যতটা খোলে, পিস্তল চালাতে ততটা নয়। ডুয়েলের আগের রাত্রে সে তার অংকের খাতায় লিখেছিল--



বঙ্গানুবাদ--**"এই প্রমাণটাতে আরো কিছু লিখতে হবে। কিন্তু আমার হাতে আর সময় নেই।"**

অবশ্য ডুয়েলে গুলি খেয়েও তৎক্ষণাৎ মারা পড়ে নি তরুণটি। রক্তাক্ত অবস্থায় ওকে বাকিরা মাঠেই ফেলে গিয়েছিল। এক চাষী দেখতে পেয়ে হাসপাতাল অব্দি নিয়ে যায়, সেখানেই মারা গিয়েছিল বেচারী। এই মাথাগরম তরুণটির নাম ছিল Evariste Galois (এভারিস্তে গ্যালোয়া), যাকে দুনিয়ার সবচেয়ে বড় খ্যাপাটে গণিতজ্ঞ বললে বোধহয় অত্যুক্তি করা হয় না। অংকে তুখোড় বুদ্ধি হলে কী হয়, বেজায় বাউণ্ডুলে স্বভাব ছিল তার, অংক কষত বিস্তর, কিন্তু ঠিক করে গুছিয়ে লিখত না। তাই ফ্রান্সের নামকরা Ecole Polytechnique-এর ভর্তির পরীক্ষায় ফেল করে গিয়েছিল। অধ্যক্ষ নাকি তার খাতা দেখে বলেছিলেন, এই ছোকরা কী যে ছাই লেখে মাথামুণ্ডু কিছুই বোঝা যায় না[4]।

তা, এহেন Galois কী বলে গেছিলেন complex number-দের নিয়ে? কিছুই বলে যান নি! তবে খামোখা তাঁর কথা আনলাম কেন? কারণ, তিনি একটা আশ্চর্য কায়দা বাৎলে গিয়েছিলেন, যা আজকে নানাভাবে পল্লবিত হয়ে Galois theory নামে সুপরিচিত। এর মধ্যে নানা উপাদান আছে, যার একটা হল পরিচিত সংখ্যাদের দিয়ে নানারকমের নতুন নতুন সংখ্যা বানানো কায়দা, যাদের অচেনা সব ধর্ম, অথচ তাও আমাদের ছোটোবেলায় শেখা কায়দায় যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ সব করা

[4]তা বলে তোমরা যেন আবার উৎসাহিত হয়ে পরীক্ষার খাতায় এলোমেলোভাবে লিখতে শুরু কোরো না!

যায়! সেই যেমন হ্যারি পটারের গল্পে আছে $9\frac{3}{4}$ নম্বর প্ল্যাটফর্ম থেকে হগ্‌ওয়ার্ট্‌স্‌ এক্সপ্রেস ছাড়ে জাদুজগতের উদ্দেশ্যে, আমাদের এই কায়দাটাও সেইভাবে পরিচিত সংখ্যাদের ভিতর থেকে অপরিচিত সংখ্যার জগতে পৌঁছোনোর হদিশ দেয়। তা সেই কায়দাটা যদি তুমি real number-দের উপর লাগাও, তবে যে নতুন সংখ্যাগুলো পাবে, সেগুলোই হল complex number! জিনিসটা রোমাঞ্চকর, হাতে সময় থাকলে আরেকটু শুনেই নাও। পাছে অংকের কচকচি শুনতে বিরক্তি লাগে, তাই ব্যাপারটা একটা রূপকথার ঢঙে বলি।

6.1.1 একটা রূপকথা

এক ছিল রাজা। রাজা থাকলেই প্রজা থাকতে হয়, নইলে আর রাজত্ব করবে কাদের নিয়ে? তা, আমাদের রাজা রাজত্ব করতেন polynomial-দের নিয়ে। Polynomial কাদের বলে জানো নিশ্চয়ই? সেই যে, x-এর power জুড়ে জুড়ে তৈরী হয়[9]। যেমন $2-3x+4.5x^2$ বা $\frac{1}{2}+\pi x^{10}$, এইরকম সব। তা রাজামশাই সুখে রাজ্যশাসন করেন। এমন সময়ে তাঁর কাছে নালিশ এল--মহারাজ, আপনার রাজ্যে $1+x^2$ বলে যে প্রজাটি আছে, সে বড় বেয়াদব, তার কোনো zero নেই, অর্থাৎ x-এর এমন কোনো value পাওয়া যাচ্ছে না, যাতে $1+x^2=0$ হয়। সে রাজ্যে কেউ কখনো complex number-দের নামও শোনে নি, তাই এই অভিযোগ অস্বীকার করার কোনো পথ নেই। আরো নালিশ আছে, এই দুর্বিনীত প্রজাটি গোপনে গোপনে আরো অনেকের মধ্যে নিজের এই দোষ সংক্রমিত করেছে। যেমন, $2+x^2$-এরও যে zero পাওয়া যায় না, সেও দেখতে গেলে ওই $1+x^2$-এরই নষ্টামি, যদি $1+x^2$-এর zero থাকত, তবে $2+x^2$-এরও থাকত। অতএব, মহারাজ, ওই $1+x^2$ ব্যাটাকে শায়েস্তা করতে আজ্ঞা হোক!

রাজা ভেবে ভেবে একশেষ। $1+x^2$-এর zero, মানে তো -1-এর square root. কিন্তু রাজামশায় সেই ছোটোবেলা থেকে শুনে এসেছেন মাইনাসে মাইনাসে প্লাস হয়, আবার প্লাসে প্লাসেও প্লাস হয়। অতএব -1-এর square root হয় নি, হয় না, হবে না, হতে পারে না! তবে উপায়?

ভেবে ভেবে তিন রাত না ঘুমিয়ে চতুর্থ রাতে সবে দুচোখের পাতা এক করেছেন, অমনি রাজা স্বপ্নে দেখলেন কে যেন তাঁকে বলছে-- অত ভেবো না, $1+x^2$-কে নির্বাসনে পাঠাও, তবেই সব গোল মিটে যাবে। ব্যস্‌ রাজ্যে ঢেঁড়া পড়ে গেল, $1+x^2$-কে polynomial রাজ্য থেকে দূর করে দেওয়া হোক। শুধু $1+x^2$-কে দূর করেই রাজমশায় ক্ষান্ত হলেন না, যেখানে যেখানে তার ছোঁয়া আছে, সব মুছে ফেলতে উঠে পড়ে লাগলেন তিনি। যেমন, $3+2x^2$ কানমলা খেয়ে স্বীকার করতে বাধ্য হল, যে তার মধ্যে বেশ খানিকটা $1+x^2$ আছে, কারণ--

$$3+2x^2=1+2(1+x^2).$$

ওই $2(1+x^2)$-টুকুকে বিদায় করে রাজা তাকে স্রেফ 1-টুকু রাখতে দিলেন! তেমনি $2+3x+x^2$-কে দেখে রাজার পেয়াদারা তাকে $1+3x+(1+x^2)$ বলে চিনে ফেলায়, সে এখন হয়ে গেল খালি $1+3x$. এমন অত্যাচারের কাহিনী আর কত বলব? তার চেয়ে এক কথায় বলি--

> রাজামশায় কোনো polynomial পেলেই তাকে $1+x^2$ দিয়ে ভাগ করে খালি ভাগশেষটুকুকে রাখেন।

ফলে বড় বড় ডিগ্রীধারী কেউকেটা সব polynomial-রা এখন সবাই কচুকাটা হয়ে পড়ে রইল খালি কুঁচোকাঁচাদের দল। $1+x^2$-এর ডিগ্রী ছিল 2. তাই $1+x^2$ দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নিলে, তার ডিগ্রী বড়োজোর 1 হতে পারে। তাই polynomial-দের রাজ্যে এখন হাহাকার, খালি পড়ে আছে $a+bx$ জাতীয় ক্ষুদে polynomial-রা। কিন্তু তাতেও কি রক্ষে আছে? একদিন $1-x$ চুপি চুপি $1+x$-কে বিয়ে করল। অমনি ওদের মধ্যে গুণ হয়ে জন্ম নিল $(1-x)(1+x)=1-x^2$. যার মধ্যে আবার $1+x^2$ আছে, কারণ $1-x^2=2-(1+x^2)$. রাজার কাছে খবর যেতেই সেপাই সান্ত্রী বরকন্দাজ সবাই মিলে দৌড়ে এসেছে, ওই $1+x^2$ অংশটুকুকে বিদায় করে ওকে পরিণত করেছে স্রেফ 2-তে! পুরোনো গুণের নিয়মে আর বিয়ে করা এখন থেকে বন্ধ। গুণের নতুন নিয়ম হল--

> প্রথমে পুরোনো কায়দায় গুণ করে যা পাওয়া যাবে, সেটাকে রাজার লোক এসে $1+x^2$ দিয়ে ভাগ করে, ভাগশেষটুকু খালি রাখবে।

যেমন, নতুন নিয়মে $(1-x)(1+x)=2$. তেমনি, $(2+3x)x=-3+2x$.

[9]অবশ্য x না লিখে y বা t বা অন্য কোনো variable লিখলেও আপত্তি নেই!

Exercise 26: বলো তো নতুন নিয়মে $x \times x$ কত হবে? আর $(x+2)^2$-ই বা কত হবে? ■

সব বিয়ের আসরে তো আর রাজার লোক বসানো যায় না। তাই রাজামশায় একটা ফর্মুলা করে দিলেন, $a+bx$ আর $c+dx$-এর মধ্যে নতুন নিয়মে গুণ হলে কী হবে। প্রথমে প্রচলিত নিয়মে গুণ করে বেরোবে $(a+bx)(c+dx) = ac+(ad+bc)x+bdx^2$. একে $1+x^2$ দিয়ে ভাগ করলে হবে এইরকম--

$$\begin{array}{rl} 1+x^2 \big) & ac+(ad+bc)x+bdx^2 \big(\, bd \\ & bd \qquad\qquad\qquad + bdx^2 \\ \hline & ac-bd+(ad+bc)x \end{array}$$

সুতরাং রাজ্যে ঘোষণা করে দেওয়া হল--

> বিবাহের নব্যবিধি অনুসারে $a+bx$ আর $c+dx$-কে গুণ করলে হবে $ac-bd+(ad+bc)x$.

ভয়ে কেউ টুঁ শব্দটি করতে পারে না। রাজসভার বিদুষক রাজাকে বলল-- মহারাজ, গুণের নিয়ম বদলালেন, যোগ আর বিয়োগের নিয়ম বদলাবেন না? রাজা গম্ভীরভাবে বললেন, নাঃ, তার দরকার হবে না। যোগবিয়োগ করে তো আর ওরা নিজেদের ডিগ্রী বাড়াতে পারবে না। সেটা পারত খালি গুণ করে। সে পথ বন্ধ করেছি।

হয়তো ভাবছ, আমি কীসব গাঁজাখুরি গল্প জুড়েছি। না, গাঁজাখুরি নয়। ভালো করে চেয়ে দ্যাখো। Polynomial-দের রাজ্য আর polynomial-দের রাজ্য নেই, সেটা পরিণত হয়েছে complex number-দের জগতে। খালি x-এর জায়গায় i কল্পনা করলেই বুঝবে নতুন গুণের নিয়মটা আসলে complex number-দের গুণের নিয়মটাই। আর যোগ, বিয়োগের নিয়মও তাই! এইরকম polynomial দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নেওয়ার কায়দাটাই হল সংখ্যাজগতের $9\frac{3}{4}$ নম্বর প্ল্যাটফর্ম। এই কায়দায় আরও কতরকমের সংখ্যা যে লোকে বার করেছে, তার আর ইয়ত্তা নেই। তোমরা যে DVD দ্যাখো, তার গায় একরকমের সংখ্যা খোদাই করা থাকে, সেগুলো আমাদের চেনা সংখ্যা নয় মোটেই, সেগুলোও সব এই কায়দায় বার করা। তোমরা যারা পরে অংক নিয়ে পড়াশোনা করবে, তারা **field extension** নামে একটা জিনিস শিখবে, সেখানেই জানতে পারবে এই কায়দার আরো রহস্য।

6.2 ধুস্, করে কী লাভ?

Bombelli হল, Wessel হল, এখন না হয় Galois-ও বুঝলাম, কিন্তু complex number দিয়ে কাজটা কী হয়? এমন কোনো বাস্তব জীবনের উদাহরণ আছে কি, যেখানে complex number কাজে লাগে? উত্তর হল, এরকম উদাহরণ বিস্তর আছে। কিন্তু তাদের অধিকাংশেরই আলোচনার জন্য complex number-দের বিষয়ে আরো অনেকটা জানতে হবে। তবে একটা উদাহরণ বলতে পারি, যেটা আমাদের বইয়ের পাল্লার মধ্যে আলোচনা করা যায়। এই প্রয়োগটা physics এবং electronics-এ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

আমরা নানা কাজেই বিদ্যুতের ব্যবহার করে থাকি। সেই বিদ্যুৎ মূলতঃ দুই জায়গা থেকে আসে, ব্যাটারী থেকে আর মেইন লাইন থেকে। তার প্রথমটাকে বলে DC আর দ্বিতীয়টাকে AC. এদের মধ্যে DC-র বেলায় ভোল্টেজটা সর্বদা স্থির থাকে। কিন্তু

Fig 44



Fig 45

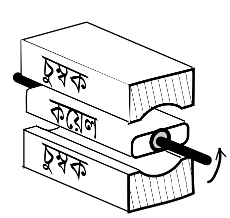
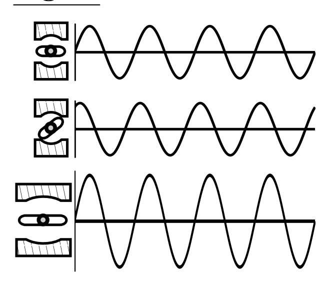


Fig 46



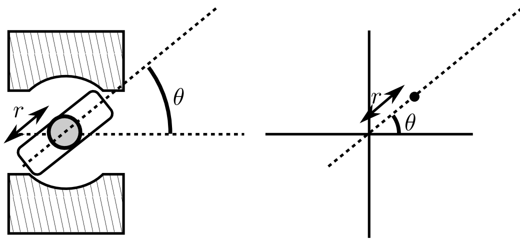


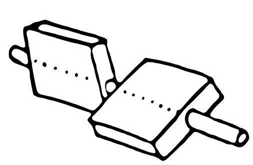
Fig 47

AC-র বেলায় সেটা ঢেউয়ের মত ওঠানামা করে। এরকম ওঠানামা করার কারণ হল AC তৈরী হয় dynamo (ডায়নামো) নামে একটা যন্ত্রের চাকা ঘুরিয়ে। ডায়নামো তোমরা সম্ভবতঃ সকলেই দেখেছ। অনেক সাইকেলের সঙ্গে লাগানো থাকে (Fig 44)। কোনো অনুষ্ঠানবাড়িতে যে জেনারেটর ব্যবহার করা হয়, তার মধ্যেও ডায়নামো থাকে। এই ডায়নামোর মূল উপাদান হল একটা তারের কয়েল (কুণ্ডলী), যেটা একটা বাক্সের মত জিনিসের গায় তার জড়িয়ে জড়িয়ে তৈরী। সেটা দুটো চুম্বকের মাঝখানে ঘুরলে কয়েলের মধ্যে বিদ্যুৎ তৈরী হয়, আর সেই বিদ্যুৎ তার বেয়ে বাইরে বেরিয়ে আসে। চুম্বক দুটো আর কয়েলের অবস্থান বোঝানোর জন্য একটা ছবি এঁকেছি Fig 45-এ। কয়েলের ভিতরে ইলেক্ট্রনগুলোও ঘোরার বিভিন্ন মুহূর্তে বিভিন্ন পরিমাণ ছোটাছুটি করে, ফলে ভোল্টেজও ঢেউয়ের মত ওঠানামা করে। মেলায় উঁচু নাগরদোলায় চড়লে যেমন বিভিন্ন মুহূর্তে বিভিন্নরকম অনুভূতি হয় (নীচে নামার সময়ে হুশ্ করে নেমে আসে, আবার একেবারে উপরে উঠে যেন মুহূর্তের জন্য স্বস্তি পাওয়া যায়), এটাও অনেকটা সেরকমই আর কি! কয়েলটা ঠিক কী অবস্থান থেকে ঘোরা শুরু করেছে তার উপর নির্ভর করে এই ঢেউয়ের আচরণ। এরকম তিনটে উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 46-এ। তিনটে কয়েলই একই বেগে ঘুরছে। উপরের দুটো কয়েল দেখতে একইরকম, কিন্তু ওদের প্রাথমিক অবস্থান আলাদা ছিল, তাই ঢেউ দুটো লক্ষ করো পরস্পরের থেকে খানিকটা আগুপিছু হয়ে গেছে। প্রথম আর তৃতীয় কয়েল দুটোর প্রাথমিক অবস্থান এক হলেও, ওদের আকারের পার্থক্য আছে। সেই কারণে ওদের ঢেউ দুটো একই সঙ্গে ওঠানামা করলেও, একটা ঢেউগুলো বেশী বড়। এই যে দুটো ব্যাপার, কয়েলের সাইজ এবং তার প্রাথমিক অবস্থান, এই দুটো তথ্যকে একসঙ্গে প্রকাশ করার কাজে complex number-এর বিরাট ভূমিকা। কয়েলের সাইজটাকে modulus এবং কয়েলের প্রাথমিক অবস্থানের কোণটাকে argument ধরে যে complex number-টা পাওয়া যায়, সেইটা দিয়ে পুরো জিনিসটা প্রকাশ করা হয়। বোঝার জন্য Fig 47 দেখে নাও[10]। এইভাবে প্রকাশ করায় বিভিন্ন সুবিধা হয়। তার মধ্যে দুটো নিয়ে এখানে আলোচনা করব।

যদি দুটো ব্যাটারীকে পরপর লাগাও, তবে ওদের ভোল্টেজ যোগ হয়ে যাবে, যেমন একটা 3 volt-এর টর্চ জ্বালাতে দুটো 1.5 Volt-এর ব্যাটারী লাগে। কিন্তু AC যেহেতু ঢেউ খেলে চলে, তাই সহজ যোগে কাজ হবে না। কিন্তু আশ্চর্যের কথা এই যে, ব্যাপারটা complex number-এর যোগের নিয়ম মেনে চলে! ধরো দুটো কয়েল লাগানো আছে একই অক্ষের উপর (Fig 48)। একই অক্ষের সঙ্গে আটকানো থাকায় দুজনেই একই সঙ্গে ঘুরতে বাধ্য। কিন্তু ওদের মধ্যে খানিকটা কোণ আছে। ফলে একটা কয়েলের ঢেউ যখন উঠছে, অন্যটার ঢেউ তখন হয়তো নামছে। ঠিক যেমন নাগরদোলার একটা দোলনায় তুমি যখন উপরে উঠে এক পলকের স্বস্তি পাচ্ছ, সেই মুহূর্তেই একই নাগরদোলার আরেকটা দোলনায় বসে তোমার বন্ধু হয়তো স্বর্গ থেকে পতনের সুখ অনুভব করছে! প্রথম কয়েলটার complex রূপ যদি হয় $2+3i$ আর দ্বিতীয়টার বেলায় $4+5i$, তবে

[10]কী করে এই সাইজটা মাপা হয়, সেই খুঁটিনাটির মধ্যে যাচ্ছি না এখানে।

Fig 48



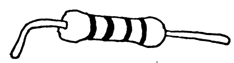


Fig 49

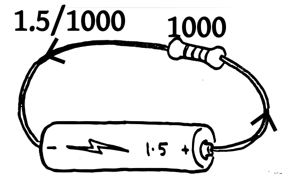


Fig 50

ওদের সম্মিলিত ভোল্টেজ হবে $2+3i+4+5i=6+8i$-এর মত। এই কায়দায় একটা মস্ত বড় কয়েলওয়ালা ডায়নামো না বানিয়ে ইঞ্জিনীয়াররা অনেকগুলো ছোটো ছোটো কয়েল একই অক্ষের উপর সাজিয়ে বসান। তাতে বিদ্যুৎটা বড় কয়েলের মতই হয়, অথচ বানানোটা অনেক সহজ হয়।

AC-কে complex number হিসেবে চিন্তা করাটা আরেক জায়গাতেও খুব কাজে লাগে। সেটা একটু জটিল, তাই সংক্ষেপে বলি। তোমরা স্কুলে শিখেছ-- কোনো পরিবাহী তড়িৎ প্রবাহকে বাধা দিতে পারে। এই বাধার পরিমাণকে একটা real number দিয়ে প্রকাশ করা হয়, যাকে বলে ওই পরিবাহীর **resistance** কারখানাতে ইচ্ছেমত resistance-ওয়ালা পরিবাহী তৈরী করা যায়, তাদের বলে **resistor.** একটার ছবি দেখিয়েছি Fig 49-এ। যদি একটা 1.5 একক ভোল্টেজের ব্যাটারীতে একটা 1000 একক resistor লাগাও (Fig 50), তবে current (তড়িৎপ্রবাহ) বইবে $1.5/1000$ একক[11]। যদি resistance-টাকে দ্বিগুণ করে 2000Ω করো, তবে current-ও অমনি অর্ধেক হয়ে যাবে। একে বলে Ohm's law (ওহ্‌মের সূত্র)। এই ব্যাপারটা AC-র ক্ষেত্রেও খাটে। খালি সেখানে ভোল্টেজটা ঢেউয়ের মত ওঠানামা করে বলে current-ও তালে তালে ওঠানামা করবে। এই current যদি একটা electromagnet (তড়িৎচুম্বক)-এর মধ্যে পাঠাও, তবে সেই চুম্বকের তেজও সময়ের সাথে সাথে বাড়বে কমবে। এইটাকে কী করে কাজে লাগানো যায় শোনো। ধরো কয়েকটা এরকম চুম্বক পরপর রাখলে, সেগুলো আলাদা আলাদা ডায়নামোর সঙ্গে লাগানো। ডায়নামোগুলো সবাই একই অবস্থান থেকে শুরু করে নি, একটু আগুপিছু করা আছে। তাই চুম্বকগুলোর তেজও একইসাথে উঠছে বা নামছে না। এবার ধরো একটা লোহার টুকরো প্রথম চুম্বকটার কাছে আছে। যেই সেই চুম্বকে তেজের জোয়ার আসবে, অমনি লোহার টুকরোটা তার দিকে ছুটে যাবে, কিন্তু পৌঁছতে পৌঁছতে ওই চুম্বকের তেজে ভাঁটা পড়ে যাবে, এবং পরের চুম্বকটায় জোয়ার আসবে, অতএব লোহাটা তখন না থেমেই পরেরটার দিকে ছুটে যাবে, সেটাতে পৌঁছে যে হাঁপ ছাড়বে তার জো নেই, কারণ ততক্ষণে তৃতীয় চুম্বকের টান শুরু হয়ে গেছে, এইভাবে লোহার টুকরোটা এগোতেই থাকবে। অবশ্য এইভাবে বেশীক্ষণ চালাতে গেলে অনেক অনেক চুম্বক পরপর সাজাতে হবে, এবং ডায়নামোও লাগবে অনেকগুলো। Nicola Tesla নামে একজন বৈজ্ঞানিক এই কায়দাটাকেই কাজে লাগিয়েছিলেন, কয়েকটা চুম্বককে গোল করে সাজিয়ে। শেষ চুম্বকটার ভাঁটার সাথে সাথে ফের প্রথম চুম্বকটার জোয়ার শুরু হত, অতএব গতি আর বন্ধ হত না। পরিকল্পনাটা ভালোই, খালি প্রত্যেকটা চুম্বকের জন্য একটা করে আলাদা ডায়নামো লাগানোটা কষ্টকর। যদি একটা ডায়নামো থেকে উৎপন্ন current-এর ঢেউগুলোকেই ইচ্ছে মত আগুপিছু করে নেওয়া যেত, তবে খুবই সুবিধা হত। সেটা সত্যিই করা যায়, এবং সেখানে complex number-এর একটা ভূমিকা আছে। ব্যাপারটা এইরকম। ধরো একটা ডায়নামো আছে, যার ভোল্টেজকে $20+30i$ দিয়ে প্রকাশ করছি। এর সামনে যদি একটা 10 একক শক্তিওয়ালা resistor লাগাও, তবে যে current-টা তৈরী হবে সেটাকে আমরা Ohm's law-র অনুকরণে $\frac{20+30i}{10}=2+3i$ দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। যদি ভোল্টেজটা হত $30+40i$, তবে ওই একই resistor লাগালে পেতে $\frac{30+40i}{10}=3+4i$ একক current. প্রশ্ন হচ্ছে, $20+30i$ ভোল্টেজওয়ালা ডায়নামো থেকেই আমরা $3+4i$ পরিমাণ current পেতে পারি কিনা। উত্তর হল--হ্যাঁ পারি, যদি এমন একটা resistor বানাতে পারি যার resistance হল R যেখানে

$$\frac{20+30i}{R}=3+4i \text{ অর্থাৎ } R=\frac{20+30i}{3+4i}=\frac{36}{5}+\frac{2}{5}i.$$

সে আবার কী রে বাবা, complex resistance-ওয়ালা resistor আবার হয় না কি? উত্তর হল--হয় বৈকি, তবে লোকে আর তাকে resistor না বলে capacitor বলে। তোমার মাথার উপরে যে ফ্যানটা ঘুরছে, তার মধ্যে একটা বড়সড় ব্যাটারীর সাইজের জিনিস রয়েছে Fig 51। ওইটাই হল ওই capacitor-টা। ফ্যানের মোটরের মধ্যে আছে দুইপ্রস্থ তড়িৎ চুম্বক, একটার সঙ্গে বাড়ির মেইন লাইন সরাসরি লাগানো আছে, অন্যটার সঙ্গে লাগানো আছে ওই capacitor-টার মধ্যে দিয়ে। তাই একটা

[11]যেহেতু এটা মোটেই physics-এর বই নয়, তাই খালি "একক" লিখেই ছেড়ে দিলাম, কোনটার কী একক সেই খুঁটিনাটির মধ্যে আর গেলাম না

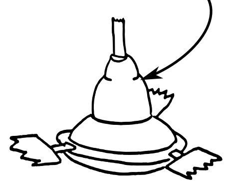


Fig 51

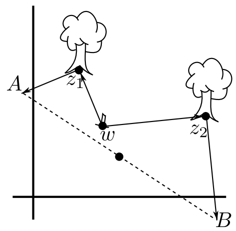
চুম্বকের জোয়ারের সময়ে অন্যটার ভাঁটা চলে। ফলে একবার এ টানে, একবার ও টানে। ওদের টানার তালে তালে একটা ধাতব খাঁচা ক্রমাগতই ঘুরতে থাকে, আর সেই সঙ্গে ঘোরে খাঁচার সঙ্গে লাগানো ব্লেডগুলো। বুঝতেই পারছ, জোয়ার ভাঁটার হিসেবটা যথেষ্ট সূক্ষ্মভাবে করা না থাকলে কোথাও একটা তাল কেটে যেত। এই হিসেবটা করার কাজে complex number-দের মস্ত বড় ভূমিকা।

Answers

1. এরকম বহু complex number আছে যারা purely real বা purely imaginary কোনোটাই নয়, যেমন $1+2i$. কিন্তু যদি একইসঙ্গে purely imaginary আর purely real চাও, তবে সেরকম complex number আছে ঠিক একটাই, সেটা হল শূন্য, মানে $0+0i$. **2.** $x=y=0$. **3.** $z-w=7-9i$ এবং $w+z=3+3i$.
4. (i) $-10+11i$ (ii) $2(\pi+1)+i(1-4\pi)$ (iii) $-10-20i$ (iv) 13.

5. $(ac-bd)+(ad+bc)i$. **6.** এখানে $x+iy=-i(-2+3i)=(-i)(-2)+(-i)(3i)=2i-3i^2=3+2i$. সুতরাং real আর imaginary অংশ আলাদা করে পাচ্ছি $x=3$ আর $y=2$. অতএব $(x,y)=(3,2)$. তার মানে উত্তর হল (B).
7. $3i^3-2ai^2+(1-a)i+5=-3i+2a+(1-a)i+5=(2a+5)-(a+2)i$. তাই উত্তর হবে $a=-2$.
8. (C). **9.** Term-গুলোকে চারটে চারটে করে প্যাকেটে সাজাও। মোট $225+1=226$-টা term আছে (কারণ $n=0$ থেকে গোণা শুরু করেছি)। একে 4 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 2. তাই শেষের দুটো term প্যাকেটের বাইরে থাকবে। প্রতিটা প্যাকেটের যোগফল হবে 0. প্যাকেটের বাইরের দুটোই খালি বেঁচে থাকবে। তাই উত্তর হবে $1+i$ মানে (B). **10.** $x=105$, $y=36$. তাই $y-x=-69$. **11.** (i) $-7+24i$, (ii) $-7-24i$, (iii) 25, (iv) $-117+44i$. **12.** (i) $-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}i$. (ii) $\frac{2}{\pi}+\frac{i}{5\pi^2}$. (iii) $-\frac{7}{2}+\frac{10}{3}i$. (iv) যদি $z=\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$.
13. (i) i, (ii) $-\frac{2}{5}-2i$, (iii) $-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$, (iv) $-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$, (v) $\frac{44}{125}-\frac{117}{125}i$. **14.** (i) $-\frac{2}{5}-2i$, (ii) $2+3i$, (iii) $-12-5i$, (iv) $\frac{5}{2}+2i$. **15.** (D). এখানে একটু সতর্ক হয়ে এগোলে বেশ খানিকটা পরিশ্রম বাঁচানো যায়-- $\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}=\frac{2+3i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}\times\frac{1+2i\sin\theta}{1+2i\sin\theta}$. এর মধ্যে নীচের তলায় একটা real number আসবে, সুতরাং সেটা নিয়ে আর মাথা ঘামানোর দরকার নেই। আমাদের দরকার উপরতলার real অংশটা যেন শূন্য হয়, অতএব উপরতলার imaginary অংশটাও বার করার দরকার নেই। উপরতলার real অংশটা আসবে $2-6\sin^2\theta$. একে শূন্য হতে হলে $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$ হতে হবে। সুতরাং (D) হবে একটা উত্তর। সাবধান $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$ হলেই $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ হবেই, এমন বলছি না। আমি বলছি উল্টো দিকটা, মানে $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$ হবেই। এটা ছাড়াও θ-র অন্যান্য value-ও সম্ভব, কিন্তু আমাদের তো সব value বার করতে বলে নি, বলেছে খালি "A value of θ for which ..."

এবার দেখে নাও বাকি option-গুলোর জন্য $\sin^2\theta$-টা $\frac{1}{3}$ হচ্ছে কিনা। **17.** আমরা চিন্তা করব Wessel-এর মত করে। দ্বীপটা ধরো complex plane-এ রয়েছে। Origin আর axis দুটো যেভাবে খুশি নিতে পারো। ধরো আমরা নীচের ছবিটার মত করে নিলাম--



তাহলে দ্বীপের প্রতিটা বিন্দুই একেকটা complex সংখ্যা। ধরো অশ্বত্থ গাছটা আছে z_1 বিন্দুতে, বটগাছটা z_2-তে আর খুঁটিটা w বিন্দুতে। তাহলে খুঁটি থেকে অশ্বত্থগাছ অব্ধি যাওয়া মানে $z_1 - w$. এইবার বাঁদিকে 90° ঘুরবে (মানে ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে), তার পর একই দূরত্ব যাবে। তাহলে পৌঁছবে A-তে, মানে

$$A = z_1 + i(z_1 - w).$$

একইভাবে

$$B = z_2 - i(z_2 - w).$$

এদের মধ্যবিন্দু হল $\frac{A+B}{2} = \cdots = \frac{(1+i)z_1+(1-i)z_2}{2}$. লক্ষ করো, w-টা কেমন কেটে বেরিয়ে গেছে, অর্থাৎ খুঁটিটার কোনো দরকারই হচ্ছে না। এইটাকে তুমি একটু সাজিয়ে এভাবে লিখতে পারো--

$$\frac{z_1+z_2}{2} + i \times \frac{z_1 - z_2}{2}.$$

এটা থেকে আমরা নিজেরাই একটা নতুন সংকেত বানিয়ে নিতে পারি--

> $\frac{z_1+z_2}{2}$ হল অশ্বত্থ আর বটের মধ্যবিন্দু। আবার $z_1 - z_2$ হল বট থেকে অশ্বত্থ পর্যন্ত যাওয়া। সেটার অর্ধেক, মানে $\frac{z_1-z_2}{2}$, হল বট থেকে অশ্বত্থর দিকে মুখ করে এগোনো, কিন্তু খালি অর্ধেকটা পর্যন্ত।

সুতরাং নতুন সংকেতটা দাঁড়াচ্ছে এইরকম--

- প্রথমে বট আর অশ্বত্থের ঠিক মাঝখানে দাঁড়াও ($\frac{z_1+z_2}{2}$)।
- এবার অশ্বত্থের দিকে মুখ করো এবং সেখান থেকে 90° ঘুরে যাও ঘড়ির কাঁটার উল্টো দিকে,
- তারপর বট আর অশ্বত্থের মধ্যেকার দূরত্বের ঠিক অর্ধেকটা যাও।
- খুঁড়তে শুরু করো! Best of luck!

18. $a = d = -1$. তাই $a + d = -2$. **19.** (A). **20.** (C),(D). **21.** অন্য সমাধানটা $-2 + i$, এবং $c = -5$. **22.** 0, z আর $z + w$ এই তিনটে বিন্দু নিয়ে যে ত্রিভুজটা হবে সেটাতে একটা right angle আছে। তাই ত্রিভুজটার circumcircle-এর (মানে পরিবৃত্তের) diameter হবে $z + w$-এর তীরচিহ্নটা। অতএব উত্তর হল এই circle-টার centre, মানে $c = \frac{z+w}{2}$. **23.** এখানে -1, 1 এবং z মিলে যে ত্রিভুজটা হচ্ছে, সেটা unit circle-টার একটা diameter-এর উপরে রয়েছে, পরিধিতে মাথা ছুঁইয়ে। তাই z-এ right angle হবে। সুতরাং w হবে purely imaginary. অতএব উত্তর 0. **24.** (B). **25.** $\alpha = -2$ বা $\alpha = 2$. **26.** $x^2 = -1$ আর $(x + 2)^2 = 4x + 3$.

Chapter II
Modulus এবং argument

DAY 7
Modulus-এর বিশদ আলোচনা

গত অধ্যায়ে আমরা শিখেছি একটা complex number-এর modulus কাকে বলে। যদি complex number-টা হয় $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$, তাহলে তার modulus-এর সংজ্ঞা হল

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

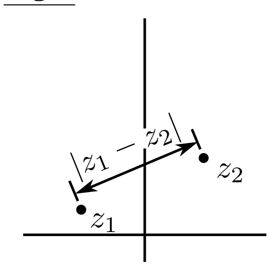
এর বিভিন্ন ধর্ম আজকে আমরা শিখব।
প্রথম ধর্ম, এবং নিঃসন্দেহে সহজতম ধর্ম, হল--

যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ যেকোনো দুটো complex number হয়, আর তুমি তাদেরকে complex plane-এর উপর দুটো বিন্দু বলে কল্পনা করো, তবে $|z_1 - z_2|$ হল ওদের মধ্যেকার দূরত্ব (Fig 1)। অতএব $z \in \mathbb{C}$ হল $|z|$-কে আমরা $|z - 0|$ বলে লিখলেই বুঝবে যে $|z|$ হল origin থেকে z বিন্দুর দূরত্ব।

লক্ষ করো z_1 আর z_2-এর মধ্যেকার দূরত্বটাকে তুমি যেমন $|z_1 - z_2|$ লিখতে পারো, তেমনি আবার $|z_2 - z_1|$-ও লিখতে পারো, কারণ $(z_1 - z_2)$-এর আগে মাইনাস লাগালেই $z_2 - z_1$ হয়, এবং মাইনাস লাগালে modulus বদলায় না। সেটাই হল modulus-এর দ্বিতীয় ধর্ম--

যদি $z \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $|-z| = |z|$ হয়।

Fig 1



প্রমাণ অতি সহজ, কারণ যদি $z = x + iy$ হিসেবে লেখো, যেখানে $x, y \in \mathbb{C}$, তবে $-z = -x - iy$. সুতরাং

$$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

তৃতীয় ধর্ম হল--

$z \in \mathbb{C}$ হলে $z = 0$ হওয়া আর $|z| = 0$ হওয়া সমার্থক।

এটা তো বোঝাই যাচ্ছে যে, $z = 0$ হলে $|z| = 0$ হবে। কিন্তু এর উল্টো দিকটাও যে সত্যি সেটা অনেক সময়েই কাজ লাগে। ধরো $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে $|z| = 0$ মানে $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, অর্থাৎ $x^2 + y^2 = 0$. কিন্তু x, y দুজনেই real সংখ্যা, তাই x^2 আর y^2 দুজনেই ≥ 0, অতএব ওরা পরস্পরকে কাটাকাটি করে 0 করতে পারবে না, সুতরাং $x^2 + y^2 = 0$ একভাবেই খালি হতে পারে, যদি $x = y = 0$ হয়, মানে $z = 0$ হয়।
Modulus-এর জন্য আমরা $|z|$ চিহ্নটা ব্যবহার করি। এই একই চিহ্ন real সংখ্যাদের বেলায় ব্যবহার করা হয় absolute value বোঝাতে। একই চিহ্ন দুই ক্ষেত্রেই ব্যবহার করার একটা কারণ আছে। এবং সেটাই আমাদের চতুর্থ ধর্ম--

যদি $z \in \mathbb{C}$ থাকে real axis-এর উপরে (মানে $z = x + 0i$ চেহারার হয়, যেখানে $x \in \mathbb{R}$), তবে সত্যিই z-এর modulus হবে x-এর absolute value.

প্রমাণটা এইরকম, $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$, কারণ real সংখ্যাদের বেলায় আমরা জানি যে, $\sqrt{x^2}$ মানে হল x^2-এর nonnegative square root. যেমন $x = -2$ নিলে $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |x|$.
Modulus-এর পঞ্চম ধর্ম হল

যেকোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $|\bar{z}| = |z|$ হয়।

কেন এমন হয়, সেটা বোঝা কঠিন নয়--ধরো $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তবে $\bar{z} = x - iy$. সুতরাং--

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Conjugate নিয়েই আরো একটা ধর্ম আছে, সেটাকেই ষষ্ঠ ধর্ম ধরা যাক--

যেকোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $z \times \bar{z} = |z|^2$ হয়।

এটা আসলে $a^2 - b^2$ ফর্মুলাটার একটা প্রয়োগ--যদি $z = x + iy$ নাও, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$, তবে

$$z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Modulus-এর সপ্তম যে ধর্মটার কথা বলব, সেটা দিয়ে অনেক সময়ে বিচ্ছিরি দেখতে complex number-দের modulus চট্ করে বার করা যায়, সরাসরি সংজ্ঞা ব্যবহার না করেই।

যদি $w, z \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $|wz| = |w| \times |z|$. একইভাবে যদি $z \neq 0$, হয়, তবে $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$.

বস্তুতঃ, Wessel যখন বলেছিলেন যে দুটো complex number-কে গুণ করলে তাদের তীরচিহ্নের দৈর্ঘ্যদুটো গুণ হয়ে যায়, তখন তিনি এই $|wz| = |w| \times |z|$ সূত্রটাই বলেছিলেন।
প্রমাণটা বলি। ধরো প্রথম অংশটা। প্রথমে w আর z-কে real এবং imaginary অংশে ভেঙে লিখে নাও, $w = a + ib$ এবং $z = c + id$, যেখানে $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. তাহলে--

$$wz = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

অতএব--

$$\begin{aligned}
|wz| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}
\end{aligned}$$

এবার a^2-ওয়ালা জিনিসগুলোকে এক জায়গায়, আর b^2-ওয়ালা জিনিসগুলোকে অন্য জায়গায় করি।

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = |w| \times |z|.
\end{aligned}$$

দ্বিতীয় অংশের প্রমাণটাও সহজ। প্রথমে দেখিয়ে নেব যে, $z \neq 0$ হলে $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ হয়। সেটা হবে এইভাবে--

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{(c+id)(c-id)} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-id}{c^2+d^2}.$$

সুতরাং এর modulus হচ্ছে

$$\sqrt{\left(\frac{c}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{-d}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1}{|z|},$$

ঠিক যেমনটা দরকার ছিল। এবার $\frac{w}{z}$-কে $w \times \frac{1}{z}$ বলে ভাবো, এবং প্রথম অংশটা লাগিয়ে দাও, ব্যস, দ্বিতীয় অংশটা পেয়ে যাবে--

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \left|w \times \frac{1}{z}\right| = |w| \times \left|\frac{1}{z}\right| = |w| \times \frac{1}{|z|} = \frac{|w|}{|z|}.$$

এই ধর্মটা ব্যবহার কয়েকটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস পাওয়া যায়--

- যেকোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $|z^n| = |z|^n$ হয়। এটা যেকোনো $n \in \mathbb{Z}$-এর জন্যই খাটে, positive, zero বা negative যাই হোক না কেন[1]।
- যদি কিছু complex number নাও, যাদের প্রত্যেকেরই modulus হল 1, তবে তাদের যতই গুণ, ভাগ করো না কেন, উত্তরটার modulus সর্বদা 1-ই থাকতে বাধ্য। যাবতীয় complex number যাদের modulus হল 1, তাদের set-টা হল complex plane-এর উপর একটা circle. এর radius (ব্যাসার্ধ) হল 1 এবং centre (কেন্দ্র) হল origin-এ[2]। Fig 2 দেখে নাও। এই circle-টার পরিধির উপরে যে কোনো দুটো সংখ্যার গুণফল বা ভাগফল আবার এই পরিধির উপরেই থাকবে! এই কারণে complex number-দের জগতে এই circle-টার বেজায় কদর।

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান, গুণ আর ভাগের বেলায় modulus-ও দিব্যি গুণ বা ভাগ হয়ে যায়। কিন্তু ফূর্তির চোটে যেন ভেবে বোসো না যে, যোগ বিয়োগের ক্ষেত্রেও তাই হবে। যদি $z, w \in \mathbb{C}$ হয় তবে $|z + w|$ কিন্তু $|z| + |w|$ নাও হতে

[1] মনে রেখো, $\mathbb{Z}$ হল যাবতীয় integer-এর set.
[2] যেহেতু $|z| = |z - 0|$ হল origin থেকে z-এর দূরত্ব, তাই $|z| = 1$ মানে সেই সব বিন্দু যারা origin থেকে 1 দূরত্বে আছে।

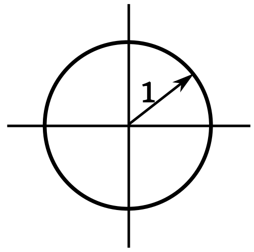


Fig 2

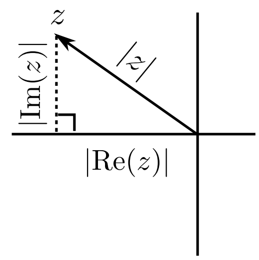


Fig 3

পারে, বা $|z-w|$-টা $|z|-|w|$ নাও হতে পারে। যেমন ধরো $z=1$ আর $w=i$ হলে $|z+w|=|1+i|=\sqrt{2}$ কিন্তু $|w|+|z|=2$.
আমরা জানি যে, কোনো right angled triangle-এ (মানে সমকোণী ত্রিভুজে) সবচেয়ে বড় বাহুটা হয় hypotenuse-টা (মানে অতিভুজটা)। এ থেকেই আসে নীচের ধর্মটা--

যেকোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$ এবং $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$ হতে বাধ্য।

এরকম কেন হবে সেটা যদি না বুঝতে পারো, তবে Fig 3 দেখে নাও।
এবার হাতেকলমে কয়েকটা অংক করা যাক।

Exercise 1: কোনো $z \in \mathbb{C}$-এর জন্য যদি $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$ হয়, তবে $\mathrm{Im}(z) = ?$ ■

Exercise 2: যদি $i^2 = -1$ হয়, তবে $(3i-1)^2$-এর মডিউলাসের মান হবে

(A) 9

(B) 10

(C) 8

(D) 6

[1]
(HS2016)
HINT:
এই অংকটা করার একটা গোদা কায়দা হল প্রথমে $(3i-1)^2$-কে $x+iy$ আকারে লিখে নেওয়া (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$) এবং তারপর $\sqrt{x^2+y^2}$ বার করা। তবে আরেকটু সহজে করা যায়, $|z^2| = |z|^2$ ধর্মটাকে কাজ লাগিয়ে। চেষ্টা করে দ্যাখো। ■

Example 1: If $(1+2i)(2+3i)(3+4i) = a+ib$, find a^2+b^2. **(CBSE2019-20)**

SOLUTION:এখানে আসলে $|a+ib|^2$ চাইছে।

Here

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= |a+ib|^2\\
&= |(1+2i)(2+3i)(3+4i)|^2\\
&\quad \text{এবার গুণের সূত্র লাগানো যাবে--}\\
&= |1+2i|^2\cdot|2+3i|^2\cdot|3+4i|^2\\
&= (1^2+2^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2)\\
&= 5\times 13\times 25 = 1625.
\end{aligned}
$$

■

Exercise 3: If $x+iy=\frac{(a^2+1)^2}{2a-i}$, what is the value of x^2+y^2? **(CBSE2018-19)**
HINT: আগের অংকটার মতই, খালি এবার ভাগের সূত্র। আর হ্যাঁ, এখানে কিন্তু $x,y,a\in\mathbb{R}$ শর্তটা বলতে ভুলে গেছে, ওটা তোমাকেই ধরে নিতে হবে। ■

Example 2: $z=x+iy$ এবং $w=\frac{1-iz}{1+iz}$ এরূপ যে $|w|=1$, তবে প্রমাণ করো z বাস্তব।[4] **(HS2018)**

SOLUTION: এ অংকটা ছবি দিয়ে ভাবলে মজা লাগতে পারে। অবশ্য সেই কায়দাটা লিখে বোঝানো কঠিন। আগে লিখে করার কায়দাটা দিয়ে নিই--

> $|w|=1$ **মানে** $\left|\frac{1-iz}{1+iz}\right|=1$, **অর্থাৎ** $\frac{|1-iz|}{|1+iz|}=1$ **বা** $|1-iz|=|1+iz|$.

এখানে যেন ফস্ করে $|1+iz|=\sqrt{1+z^2}$ লিখে বোসো না। যদি z-টা real জানা থাকত, তবে সেটা বলা যেত। কিন্তু এখনও আমরা জানি না z-টা real কিনা।

> **ধরি,** $z=x+iy$ **যেখানে** $x,y\in\mathbb{R}$.
> **তাহলে** $|1-iz|=|1-i(x+iy)|=|1+y-ix|=\sqrt{(1+y)^2+x^2}$,
> **এবং** $|1+iz|=|1+i(x+iy)|=|1-y+ix|=\sqrt{(1-y)^2+x^2}$.
> **সুতরাং পাচ্ছি** $\sqrt{(1+y)^2+x^2}=\sqrt{(1-y)^2+x^2}$,
> **বা,** $(1+y)^2+x^2=(1-y)^2+x^2$,
> **বা** $(1+y)^2=(1-y)^2$,
> **বা** $1+y^2+2y=1+y^2-2y$,
> **বা** $y=0$.

যেহেতু $z=x+iy$ ছিল, অতএব $y=0$ হয়ে যাওয়াতে--

> **সুতরাং** $z=x\in\mathbb{R}$ **(প্রমাণিত)।**

বিকল্প পদ্ধতি

এবার ছবি দিয়ে করার কায়দাটা বলি। এখানেও আমরা শুরু করব $|1-iz|=|1+iz|$ থেকে। আমরা জানি $|z-w|$ মানে হল complex plane-এ z থেকে w-এর দূরত্ব। এখানে অবশ্য z-এর সঙ্গে একটা করে i গুণ হয়ে আছে। তা, সেই

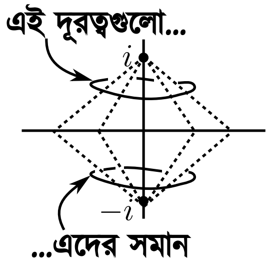


Fig 4

i-টাকে 'কমন' নিয়ে বার করে আনলে $|1-iz|$ হয়ে যাবে $|i(-i-z)|$. এখানে $i(-i)=1$ ব্যবহার করলাম। এবার লক্ষ করো, $|i(-i-z)|=|i|\times|z+i|=|z+i|$, অর্থাৎ $-i$ থেকে z-এর দূরত্ব (যেহেতু $|z+i|=|z-(-i)|$)। একইভাবে ডানদিকের $|1+iz|$-টা হবে i থেকে z-এর দূরত্ব (বুঝতে পারলে তো?)। সুতরাং $|1-iz|=|1+iz|$ মানে হল z-কে i এবং $-i$ থেকে সমদূরবর্তী হতে হবে। ছবি দিয়ে ভাবো (Fig 4)। ওই দুই বিন্দুর ঠিক মাঝখান দিয়ে যে লাইনটা যায়, সেটাই তো real axis-টা! ব্যস্‌! ■

Exercise 4: If $z=x+iy$ is a complex number such that $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1$, then we must have

(A) $x>0$

(B) $x<0$

(C) $y>0$

(D) $y<0$.

(ISI2018)

HINT:

না বলা থাকলেও এই অংকে ধরে নিয়েছে যে $x,y\in\mathbb{R}$. এই অংকটা আগের অংকটার মতই ছবি দিয়ে ভাবো। ছবি ছাড়া এগোনো এখানে অনেকটাই জটিল।

■

Example 3: Let $\mathbb{C}$ denote the set of all complex numbers. Define

$$\begin{aligned} A &= \{(z,w) : z,w\in\mathbb{C} \text{ and } |z|=|w|\}, \\ B &= \{(z,w) : z,w\in\mathbb{C} \text{ and } z^2=w^2\}. \end{aligned}$$

Then

(A) $A=B$

(B) $A\subset B$ and $A\neq B$

(C) $B\subset A$ and $B\neq A$

(D) none of the above.

(ISI2015)

SOLUTION: এই অংকের notation-টা তোমার অপরিচিত হতে পারে। এখানে A আর B দুটো set. এদের সদস্যরা দেখতে (z, w)-এর মত, যেখানে $z, w \in \mathbb{C}$. অর্থাৎ এখানে কাজ হচ্ছে এক জোড়া করে complex number নিয়ে, যেমন একটা উদাহরণ ধরো $(1+i, 1-i)$. যদি এরা বিশেষ কিছু শর্ত পালন করে, তবে সে জোড়াটা A-র মধ্যে থাকার অধিকার পাবে। তেমন B-তে থাকার জন্যও কিছু একটা শর্ত আছে।

- A-র বেলায় শর্তটা হল-- সংখ্যা দুটোর modulus সমান হতে হবে। যেমন আমাদের উদাহরণে $|1+i| = \sqrt{2}$, আবার $|1-i|$-ও হল $\sqrt{2}$. অতএব $(1+i, 1-i) \in A$. কিন্তু যদি $(1+i, 1+2i)$ নিতাম, তবে সেটা A-র মধ্যে থাকত না, কারণ $|1+i| \neq |1+2i|$.
- ওদিকে B-এর বেলায় শর্তটা হল--সংখ্যা দুটোর square সমান হতে হবে। যেমন $(i, -i) \in B$ হবে, কারণ $i^2 = (-i)^2$, কিন্তু $(1+i, 1+2i) \notin B$.

Notation-এর গল্প অনেক হল। এবার অংকটা করা যাক। এখানে তোমাকে বোকা বানানোর চেষ্টা করা হয়েছে। Real number-দের বেলায় দুটো সংখ্যার "absolute value সমান হওয়া" আর তাদের "square সমান হওয়া", দুটোই সমার্থক, যেমন -2 আর 2-এর absolute value সমান, এবং ওদের দুজনেরই square-ও একই। কিন্তু complex number-দের বেলায় $|z|$ মানে হল z-এর modulus. দুটো complex number-এর "modulus সমান" মানেই যে ওদের "square সমান" হবে, এমন কোনোই কথা নেই, যেমন i আর 1-এর কথাই ভাবো[3]। এখানে $|i| = |1|$, কিন্তু $i^2 \neq 1^2$. অতএব $(i, 1) \in A$ হলেও $(i, 1) \notin B$. সুতরাং $A = B$ বা $A \subset B$ হতে পারে না। কিন্তু যদি $w^2 = z^2$ হয়, তবে ওদের modulus সমান হবেই, কারণ $|w^2| = |z^2|$, তার মানে $|w|^2 = |z|^2$. যেহেতু $|w|, |z| \geq 0$, তাই $|w| = |z|$ না হয়ে যায় কোথায়? সুতরাং উত্তর হল (C). ■

এবারের অংকটা ভারি মজার। ছবি দিয়ে ভাবলে চোখে দেখেই হয়ে যায়। আর ছবি ছাড়া করতে গেলে নিজেই ছবি হয়ে যেতে হয়!

Example 4: For any integer k, let $\alpha_k = \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)$, where $i = \sqrt{-1}$. The value of the expression

$$\frac{\sum_{k=1}^{12} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|}{\sum_{k=1}^{3} |\alpha_{4k-1} - \alpha_{4k-2}|}$$

is... **(jeeadv.p2.2015)**

SOLUTION: এখানেও সেই $i = \sqrt{-1}$ লিখেছে। এর বদলে $i^2 = -1$ লিখলে সঠিক হত, সে কথা গত অধ্যায়েই বলেছি। গত অধ্যায় থেকে আরেকটা জিনিসও মনে করিয়ে দিই--যদি কোনো $z \in \mathbb{C}$-এর modulus হয় r এবং argument-এর একটা value হয় θ, তবে তাকে লেখা যায়

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

[3] হ্যাঁ, 1 অবশ্যই একটা complex number, কারণ $1 = 1 + 0i$.

Fig 5

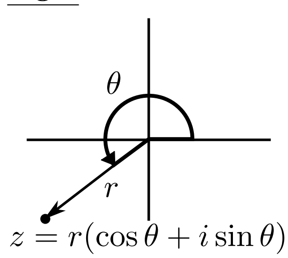
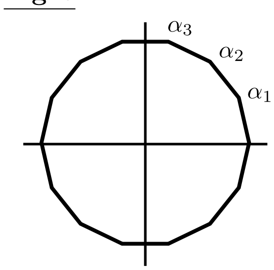


Fig 6



এবং ছবিতে দেখতে হয় Fig 5-এর মত। আমাদের α_k-গুলোও ঠিক এরকমই দেখতে, যেখানে $r = 1$ এবং $\theta = \frac{k\pi}{7}$. সুতরাং α_k-গুলোকে ছবিতে দেখাবে Fig 6-এর মত। দিব্যি একটা regular 14-gon-এর (মানে সমান 14-টা বাহুওয়ালা[4] বহুভুজের) চার ধারে প্রদীপের মত সাজানো।

> Here the α_k's are situated at the vertices of a regular 14-gon as shown in Fig 6.

যেহেতু polygon-টার সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান, সুতরাং যেকোনো দুটো পরপর α_k-র দূরত্ব একই হবে, যেমন $|\alpha_2 - \alpha_1|$ বা $|\alpha_8 - \alpha_7|$ সমান হবে।

> Let the length of one side of the polygon be a.
>
> Then for any k we have $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| = a$.

অতএব দুটো summation-এরই প্রতিটা term-ই আসলে সমান, একটা করে বাহুর দৈর্ঘ্য। উপরতলার summation-এ যেহেতু 12-টা term আছে, তাই summation-টা হল $12a$, আর একই কারণে নীচের তলার summation-টা হল $3a$.

> Then $\sum_{k=1}^{12} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| = 12a$ and $\sum_{k=1}^{3} |\alpha_{4k-1} - \alpha_{4k-2}| = 3a$.

সুতরাং উত্তর হবে--

> Hence the answer is $\frac{12a}{3a} = 4$.

■

এই অংকটায় আমরা দেখলাম α_k-গুলো unit circle-এর উপর সমান সমান ভাবে বিন্যস্ত ছিল। নীচের অংকটায় সেই একই ব্যাপার আরেকবার আসবে, কিন্তু সামান্য অন্যভাবে। ধরো z হল unit circle-এর পরিধির উপর কোনো complex number. তার মানে $|z| = 1$. একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 7-এ। এবার যদি $z^2, z^3, \ldots$ ইত্যাদিদেরকে বিন্দু হিসেবে আঁকি, তবে কেমন দেখাবে? যেহেতু modulus-রা গুণ হয়ে যায়, তাই $z^2, z^3, \ldots$ ইত্যাদিদের প্রত্যেকেরই modulus হবে 1. তাই ওরা সকলেই unit circle-এর পরিধির উপরে থাকবে। আবার Wessel-এর থেকে আমরা জানি যে দুটো complex number-কে গুণ করলে ওদের argument-রা যোগ হয়ে যায়। তাই $\arg(z^2) = 2\arg(z)$ হবে। একইভাবে $\arg(z^3) = 3\arg(z)$, ইত্যাদি হবে। তাই $z^2, z^3, \ldots$ ইত্যাদিদের আঁকলে সবটা মিলে দেখাবে Fig 8-এর মত, ঠিক যেন চাকার অনেকগুলো স্পোক, পরপর দুটো স্পোকের মধ্যে সমান সমান কোণ। এই ছবিটা মাথায় রাখলে নীচের অংকটা অনায়াসে হবে।

Example 5: The number of complex roots of the polynomial $z^5 - z^4 - 1$ which has modulus 1 is

[4] নেহাত কবিতা নয়, নইলে চতুর্দশপদী বলা চলত।

Fig 7

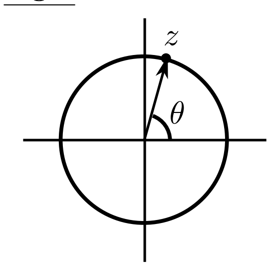
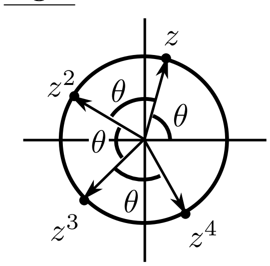


Fig 8



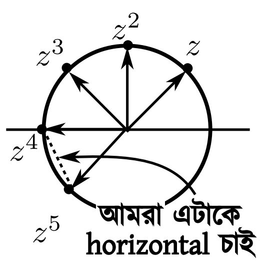


Fig 9

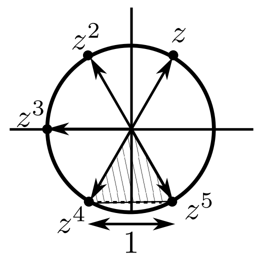


Fig 10

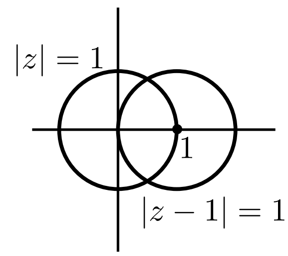


Fig 11

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) more than 2.

(ISI2020)

SOLUTION: Modulus চাইছে 1. অতএব z কে থাকতে হবে unit circle-এর পরিধির উপরে। সুতরাং স্পোকের কায়দায় ভাবলে $z, z^2, ..., z^5$ দেখাবে Fig 9-এর মত। আমাদের দরকার $z^5 - z^4 - 1 = 0$, অর্থাৎ $z^5 = z^4 + 1$. ছবি দিয়ে ভাবলে z^5 বিন্দুটা রয়েছে z^4-এর ডান দিকে ঠিক 1 ঘর দূরে, অর্থাৎ যদি z^5 আর z^4 বিন্দু দুটোকে একটা লাইন টেনে যোগ করো, তবে সেই লাইনটা horizontal হবে, দৈর্ঘ্য হবে 1, এবং তার ডানপ্রান্তে থাকবে z^5 এবং বাঁপ্রান্তে থাকবে z^4. তার মানে সব মিলিয়ে ছবিটা চাইছি Fig 10-এর মত। বুঝতেই পারছ Fig 10-র ত্রিভুজটা equilateral (সমবাহু), অতএব কোণগুলো সবাই $60°$. সুতরাং স্পোকগুলোর মধ্যে কোণ চাই $60°$, এবং z^5-কে থাকতে হবে z^4-এর ডানদিকে। এরকম ঠিক দুটোই z সম্ভব, যাদের argument হবে $60°$ আর $-60°$. সুতরাং উত্তর হল (C). ■

Exercise 5: একজন ছাত্র আগের অংকটা এইভাবে করার চেষ্টা করেছে--

> আমাদের দরকার $z^5 - z^4 - 1 = 0$ এবং একইসঙ্গে $|z| = 1$. সুতরাং $z^5 - z^4 = 1$, এবং দুপাশের modulus নিয়ে $|z - 1| = 1$. এইটাও একটা circle বোঝাচ্ছে, যার centre হল 1-এ, এবং radius হল 1. ছবিতে দেখতে Fig 11-এর মত। তার মানে z-টা একাধারে unit circle এবং এই circle-টার উপরে থাকতে বাধ্য। এই দুটো circle পরস্পরকে ঠিক দুটো বিন্দুতেই ছেদ করে। অতএব উত্তর হবে (C).

এই যুক্তিটা অসম্পূর্ণ। কেন? ■

DAY 8
Triangle inequality

8.1 কী জিনিস?

যদি $a, b \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $|ab| = |a| \cdot |b|$ হয়। সেটা আমরা গতকাল শিখেছি। ভাগের বেলাতেও একইরকম, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, খালি এক্ষেত্রে $b \neq 0$ লাগে (নইলে b দিয়ে ভাগ করা যেত না)। এসব দেখে ফস্ করে মনে হতে পারে যে, যোগ আর বিয়োগের বেলাতেও একইরকম জিনিস হবে বুঝি! মানে $|a + b|$ বোধহয় $|a| + |b|$ হবে, কিংবা $|a - b|$ হয়তো হবে $|a| - |b|$.

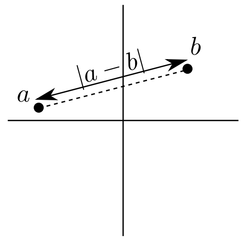


Fig 12

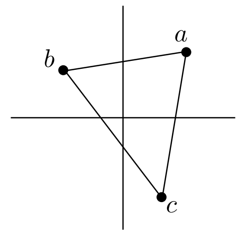


Fig 13

গতকালই সাবধান করে দিয়েছি যে, এমনটা হবার কোনোই গ্যারান্টি নেই। তবে এইধরণের একটা জিনিসের গ্যারান্টি সত্যিই আছে, এবং সেটাই হল modulus-এর সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম, যেটা এবার আমরা শিখব।
Modulus-এর প্রথম ধর্ম ছিল দূরত্ব মাপা-- যদি $a, b \in \mathbb{C}$ দেওয়া থাকে, তবে ওদের মধ্যে দূরত্ব হয় $|a-b|$. ছবিটা রয়েছে Fig 12-এ। এবার ধরো তিনটে complex সংখ্যা দেওয়া আছে, মানে complex plane-এ তিনটে বিন্দু, $a, b, c \in \mathbb{C}$. এদেরকে লাইন টেনে যোগ করলে একটা ত্রিভুজ পাবে (Fig 13)। আমরা জানি যে, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুটোর বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় বা সমান হয়। তাই $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$ হবে। একে বলে **triangle inequality.** এটা খুব কাজের জিনিস, গুছিয়ে লিখে রাখি--

Triangle inequality (version 1)

If $a, b, c \in \mathbb{C}$, then $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$.

Triangle inequality-কে আরো নানা আকারে লেখা যায়। বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন চেহারা কাজে লাগে, তাই সেগুলো শিখে রাখা ভালো। যদি $a-b$-কে z_1 আর $b-c$-কে z_2 নাম দাও, তবে $a-c$ হবে z_1+z_2. সুতরাং triangle inequality-র আরেকটা রূপ পেয়ে গেলে-- যদি $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ হয়, তবে $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ হবে। যদি এর সঙ্গে আরো একটা $z_3 \in \mathbb{C}$ জুড়ে দাও, তবে পাবে $|z_1+z_2+z_3| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|$. এভাবেই আসে triangle inequality-এর এই চেহারাটা--

Triangle inequality (version 2)

If $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, then

$$|z_1+\cdots+z_n| \leq |z_1|+\cdots+|z_n|,$$

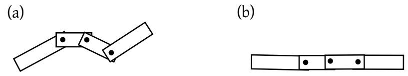
or,

$$\left|\sum_1^n z_k\right| \leq \sum_1^n |z_k|.$$

এটাকে এভাবে মনে রাখতে পারো--modulus যদি sum-এর ভিতরে ঢোকে, তবে sum-টা কখনো ছোটো হয়ে যেতে পারে না।
Triangle inequality-র আরেকটা রূপের কথা বলব এবার, যেটা কিছুটা কম পরিচিত।

Triangle inequality (version 3)

If $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, then $\big|\, |z_1|-|z_2| \,\big| \leq |z_1-z_2|$.



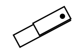


Fig 14 **Fig 15**

এর প্রমাণটা বোঝার জন্য real number-দের ব্যাপারে একটা জিনিস মনে করে নাও। ধরো $x, y \in \mathbb{R}$ এবং $x \leq y$. তার মানেই কী $-x \leq y$-ও হবেই? না, যেমন $x = -2$ আর $y = 1$ নিলে $-2 \leq 1$ অথচ $|-2| \not\leq 1$. কিন্তু যদি তোমার $x \leq y$ আর $-x \leq y$ দুইই দরকার হয়, তবে কাজে লাগে এই তথ্যটা--

> যদি $|x| \leq y$ হয়, তবে সবসময়েই $x \leq y$ এবং $-x \leq y$ হবে। বিপরীতপক্ষে, যদি একইসঙ্গে $x \leq y$ এবং $-x \leq y$ দুইই হয়, তবে $|x| \leq y$ হতে বাধ্য।

এই ব্যাপারটাই আমরা কাজে লাগাব এখানে। আমরা দেখেছি $a, b, c \in \mathbb{C}$ হলে $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ হয়। যদি $a-c$-কে z_1 আর $a-b$-কে z_2 নাম দিই, তবে $b-c$ হবে $z_1 - z_2$. সুতরাং পেয়ে যাচ্ছি $|z_1| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$ বা--

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

এটা যেকোনো z_1, z_2-এর জন্য খাটে। তাই ওদের স্থানবিনিময় করলে পাই--

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|.$$

তার মানে $|z_1| - |z_2|$ এবং তার negative, দুজনেই $|z_1 - z_2|$-র চেয়ে ছোটো (বা সমান)। অতএব আমাদের সেই তথ্যটা কাজে লাগিয়ে বলতে পারি যে, $\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| \leq |z_1 - z_2|$, ঠিক যেমনটা দেখানোর দরকার ছিল।

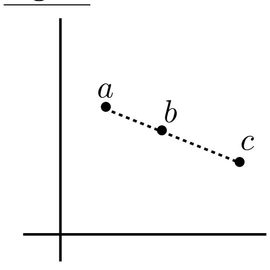
Triangle inequality-র এতগুলো রূপ দেখে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। এদেরকে মনে রাখার সহজ পথ আছে--

- প্রথম রূপটাকে এইভাবে ভাবতে পারো, $|a-c|$ হল a আর c-এর মধ্যে দূরত্ব, মানে a থেকে সোজা হাঁটতে হাঁটতে c-তে পৌঁছতে গেলে যতটা হাঁটতে হবে। আর $|a-b| + |b-c|$ হল যদি a থেকে রওনা দিয়ে b হয়ে c-তে যাও, তবে যতটা হাঁটতে হবে। সুতরাং triangle inequality-র প্রথম রূপটা বলছে যে, ঘুরপথে গেলে হাঁটার পরিমাণ কখনোই কমে যেতে পারে না।

- দ্বিতীয় সংস্করণটা মনে রাখার জন্য মনে করো কয়েকটা ডাণ্ডা একটার পর একটা ঢিলে নাটবল্টু দিয়ে জুড়ে শিকলের মত করা আছে (Fig 14(a))। শিকলের দুই প্রান্তকে পরস্পরের থেকে সবচেয়ে বেশী কত দূরে নেওয়া যায়? উত্তর হল--যখন শিকলটাকে পুরো টানটান করা হবে। এই অবস্থায় দুই প্রান্তের দূরত্ব হবে সবগুলো ডাণ্ডার দৈর্ঘ্যের যোগফল (Fig 14(b))। ডাণ্ডাগুলোকে মনে মনে তীরচিহ্ন বলে ভাবো (প্রথম ডাণ্ডাটা z_1, দ্বিতীয়টা z_2, এইরকম)। তাহলেই বুঝবে যে এটা আসলে triangle inequality-র দ্বিতীয় রূপটাই।

- এবার তৃতীয় সংস্করণটার জন্য ধরো শিকলটায় খালি দুটো ডাণ্ডা আছে। যদি জানতে চাই দুই প্রান্ত পরস্পরের সবচেয়ে কত কাছে আসতে পারে, তবে উত্তর হল-- যখন শিকলটাকে পুরো ভাঁজ করা হবে, তখন। এই অবস্থায় দূরত্বটা হবে দুটো ডাণ্ডার দৈর্ঘ্যের পার্থক্য (Fig 15)। সেটাই হল triangle inequality-র তৃতীয় সংস্করণ।

Fig 16



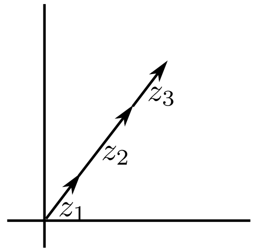


Fig 17

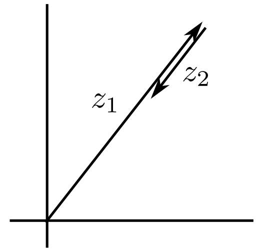


Fig 18

এই বর্ণনা থেকে এটাও বোঝা যায় যে, কখন triangle inequality-র বিভিন্ন সংস্করণে "$\leq$"-এর জায়গায় "$=$" লেখা যায়।

- প্রথম সংস্করণে "$=$" লেখা যাবে, মানে $|a-c| = |a-b| + |b-a|$ হবে, যখন b থাকবে a আর c-এর সংযোজক লাইনের উপরে, a আর c-এর মাঝখানে কোথাও (Fig 16)। তাহলে b ছুঁয়ে যাবার জন্য আর ঘুরপথে যেতে হবে না।

- দ্বিতীয় সংস্করণে "$=$" হবে, মানে $|\sum z_i| = \sum |z_i|$ হবে, যখন সবগুলো z_i-এর তীরচিহ্নই একই লাইন বরাবর একইদিকে থাকবে (Fig 17)। যদি কোনো $z_i = 0$ হয়ে যায়, তবেও চলবে। সেরকম z_i-এর তীরচিহ্নর ল্যাজা-মুড়ো একই বিন্দুতে, তাই ওরা যেকোনো লাইন বরাবরই আছে বলে ধরা যায়।

- তৃতীয় সংস্করণে "$=$" হবে, মানে $\big|\, |z_1| - |z_2| \,\big| = |z_1 - z_2|$ হবে, যখন z_1 আর z_2-র তীরচিহ্ন দুটো একই লাইনে থাকবে, কিন্তু পরস্পরের উল্টোদিকে মুখে করে (Fig 18)। এখানেও z_1 বা z_2 শূন্য হতে পারে।

8.2 প্রয়োগ

এবার আমরা triangle inequality-র কিছু প্রয়োগ শিখব। প্রতিক্ষেত্রেই উত্তরটা আমরা আগেভাগে ছবি এঁকেই বুঝে যাব, triangle inequality লাগবে সেটা গুছিয়ে লিখতে (সুতরাং MCQ-র বেলায় স্রেফ ছবি দিয়েই কেল্লা ফতে হয়ে যাবে!)। তাই প্রথমে ছবি আঁকার ব্যাপারটা একটু বুঝে নেওয়া যাক।

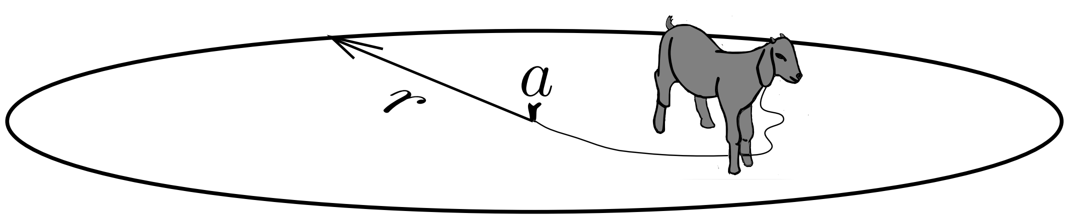
যখনই দেখবে $z \in \mathbb{C}$-এর উপর এরকম শর্ত চাপানো হয়েছে, $|z-a| \leq r$ (যেখানে $a \in \mathbb{C}$ এবং $r > 0$), অমনি ব্যাপারটাকে Fig 19-র মত করে ভাববে। Complex plane-টা যেন একটা মস্ত বড় মাঠ, তার উপর একটা ছাগল চরছে। এখানে ছাগলটা হল z, সেটাকে r দৈর্ঘ্যের একটা দড়ি দিয়ে a বিন্দুতে একটা খোঁটার সঙ্গে বেঁধে রাখা হয়েছে। তাহলে ছাগলটা কতটা জায়গায় চরতে পারবে? উত্তর হল, a-কে centre করে r-কে radius ধরে যে circle-টা পাওয়া যাবে, তার মধ্যে সর্বত্র।

যদি "$|z-a| \leq r$"-র বদলে "$|z-a| = r$" থাকে, তবেও ব্যাপারটা একইরকম। খালি দড়িবাঁধা ছাগলের বদলে কলুর চোখ-বাঁধা বলদ (Fig 20)। ঘানির ডাণ্ডায় বাঁধা, তাই দূরেও যেতে পারে না, কাছেও আসতে পারে না, খালি circle-টার পরিধি বরাবর চলতে হয়। নীচের অংকটা সেটা নিয়েই।

মা আমায় ঘুরাবি কত,
কলুর চোখ-বাঁধা বলদের মত।
ভবের গাছে জুড়ে দিয়ে মা
পাক দিতেছ অবিরত।

--রামপ্রসাদী গান

Fig 19



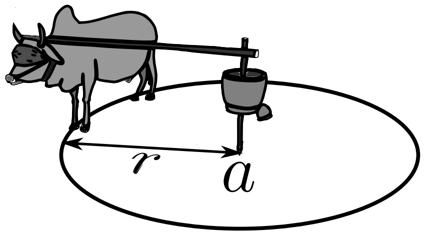


Fig 20

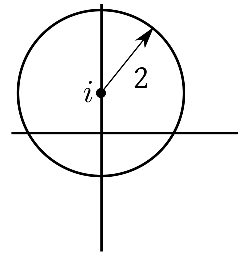


Fig 21

Example 6: সেই সব $z \in \mathbb{C}$ নাও, যাতে $|z-i|=2$ হয়। এদের set-টা ছবিতে দেখতে কীরকম?

SOLUTION: এখানে $|z-i|$ হল i থেকে z-এর দূরত্ব। সেটা যখন 2 বলে দিয়েছে, তার মানে আমরা সেইসব z-এর কথা বলছি, যারা complex plane-এর উপরে i বিন্দু থেকে 2 একক দূরত্বে রয়েছে। তাই set-টা হল একটা circle, যার radius হল 2 এবং centre হল i. ছবিটা দেখিয়েছি Fig 21-এ। ■

আরেক ধরণের ছবির কথাও বলে রাখি এই প্রসঙ্গে।

Example 7: এই set-টা ছবিতে দেখতে কীরকম বল--

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-i| = |z+1|\}.$$

SOLUTION: এরা হল সেই সব z-এর set, যারা i এবং -1 থেকে সমদূরবর্তী। Fig 22-এর দিকে চোখ রাখো। এখানে i আর -1-কে যোগ করলে যে লাইনটা পাওয়া যায় (ছবিতে ড্যাশ্‌ড্যাশ্‌ দিয়ে দেখানো), তার perpendicular bisector (মানে লম্ব সমদ্বিখণ্ডক)-ই হচ্ছে আমাদের set-টা। যদি x, y দিয়ে লিখতে চাও, তবে এই লাইনটা হল $y=-x$. ■

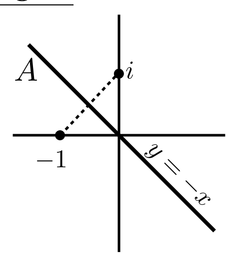
এবার নীচের অংক কয়টা করে দেখে নাও, ব্যাপারটা মাথায় ঢুকেছে কি না।

Exercise 6: নীচের প্রতিটা set-কে ছবি এঁকে বর্ণনা কর--
(*i*) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+i|=1\}$, (*ii*) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z+i|=5\}$, (*iii*) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z+i|=2|z-i|\}$, (*iv*) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z+2i|=|2iz-10|\}$.
■

এইবার আবার triangle inequality-র প্রসঙ্গে ফিরে আসি।

Example 8: z একটি জটিল রাশি, এবং $|z+5| \le 6$ হলে, $|z+2|$-এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করো।[2]

Fig 22



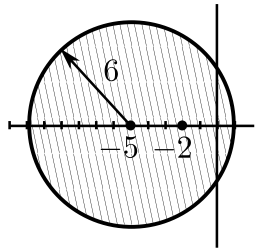


Fig 23

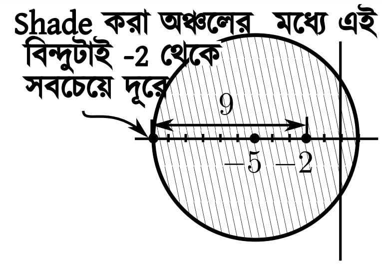


Fig 24

(HS2017)

SOLUTION: এখানে $|z+5| \le 6$ মানে হল z-টা রয়েছে -5-কে কেন্দ্র করে 6-কে radius নিয়ে আঁকা circle-এর ভিতরে বা পরিধির উপরে। এই অঞ্চলটা আমরা Fig 23-এ শেড করে দেখিয়েছি। এবার তোমাকে দেখতে হবে $|z+2|$ সবচেয়ে বেশী আর সবচেয়ে কম কত হতে পারে, মানে z-টা -2 থেকে সবচেয়ে দূরে কতটা যেতে পারে, এবং সবচেয়ে কাছেই বা কতটা আসতে পারে। একবার Fig 23-এর দিকে তাকালেই উত্তরটা বুঝতে পারা উচিত। যদি স্পষ্ট না হয়, তবে Fig 24 দেখে নাও। এই ব্যাপারটাই গুছিয়ে লেখার সময়ে লাগবে triangle inequality. আমাদের triangle-টা তৈরী হবে -5, -2 আর z-কে নিয়ে।

> Triangle inequality **থেকে আমরা জানি যে,**
>
> $$\begin{aligned} |z+2| &\le |z+5| + |-5+2| \\ &= |z+5| + 3 \\ &\le 6+3 \quad [\because |z+5| \le 6] \\ &= 9. \end{aligned}$$
>
> **যেহেতু** triangle inequality**-তে "=" আসা সম্ভব, তাই** $|z+2|$**-এর বৃহত্তম মান হবে** 9.

এখানে আমরা triangle inequality-র তৃতীয় সংস্করণ ব্যবহার করেছি। "তৃতীয় সংস্করণ" কথাটা উত্তরের মধ্যে উল্লেখ করি নি, কারণ কোনটা কত নম্বর সংস্করণ সেটা খালি এই বইতে বোঝানোর সুবিধার জন্য। ওরা কোনো standard জিনিস নয়। সবচেয়ে বেশী দূরত্ব বার করা হল। এবার সবচেয়ে কম দূরত্ব বার করতে হবে। এটা অবশ্য আরো সহজ। এখানে -2 বিন্দুটা শেড করা অঞ্চলের ভিতরেই রয়েছে। তাই $z=-2$ নিলেই সবচেয়ে কম দূরত্ব পাবে। সেই দূরত্বটা হল 0. এর চেয়ে যে কম দূরত্ব সম্ভব নয়, সে তো বলাই বাহুল্য।

> **এখানে** $z=-2$ **নিলে** $|z+5| \le 6$ **হয়। সেক্ষেত্রে তাই** $|z+2| = 0$ **হয়।**
> **তাই ক্ষুদ্রতম দূরত্বও হল** 0.

■

Exercise 7: আগের অংকটায় ক্ষুদ্রতম দূরত্ব বার করার জন্য একজন ছাত্র লিখেছে--

> Triangle inequality **থেকে পাই--**
>
> $$|z+2| \ge |z+5| - |-5+2| = |z+5| - 3 \le 6 - 3 = 3.$$

> **সুতরাং ক্ষুদ্রতম মান হল** 3.

তার এই যুক্তিতে ভুল কোথায়? ■

আগের অংকে -2-টা ছিল circle-টার ভিতরে। যদি বাইরে থাকত? সেইটা নিয়ে মাথা ঘামাতে চাইলে নীচের অংকটা করো।

Exercise 8: যদি $|z-5| \leq 2$ হয়, তবে $|z-10|$ সবচেয়ে বেশী কত হতে পারে? আর সবচেয়ে কমই বা কত হতে পারে?
HINT:
ছবি এঁকে প্রথমে বুঝে নাও উত্তরটা কী হবে। তারপর triangle inequality ইত্যাদি অস্ত্রশস্ত্র বার কোরো। ■

একই রকম আরেকটা অংক।

Exercise 9: যদি $|z-1-i| \leq 1$ হয়, তবে $|z|$ সবচেয়ে বেশী আর সবচেয়ে কম কত হতে পারে? ■

এবার সামান্য প্যাঁচ কষব।

Exercise 10: যদি $|z-1-i| \leq 2$ হয়, তবে $|z|$ সবচেয়ে বেশী আর সবচেয়ে কম কত হতে পারে? আর যদি $|z-1-i| = 2$ হত, তবে? ■

নীচের অংকটা একই ধাঁচের, তবে সামান্য একটু বেশী কঠিন।

Exercise 11: Let z_1 and z_2 be two complex numbers satisfying $|z_1| = 9$ and $|z_2 - 3 - 4i| = 4$. Then the minimum value of $|z_1 - z_2|$ is:

(A) 0

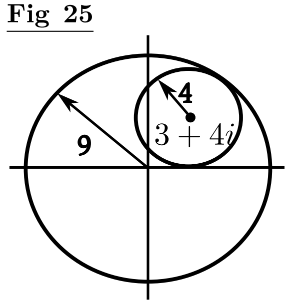
(B) 1

(C) $\sqrt{2}$

(D) 2

(jeemain.2019)
HINT:
এই অংকটা ছবি দিয়ে ভাবার পক্ষে আদর্শ (Fig 25)। এখানে z_1 রয়েছে একটা circle-এ, আর z_2 রয়েছে আরেকটা circle-এ। প্রশ্ন হল ওরা পরস্পরের সবচেয়ে কত কাছে আসতে পারে। ছবি আঁকলেই দেখবে circle দুটো পরস্পরকে স্পর্শ করছে (ওদের radius দুটোর পার্থক্য ওদের centre দুটোর দূরত্বের সমান হচ্ছে)। এবার নিশ্চয়ই উত্তরটা আন্দাজ করতে

Fig 25



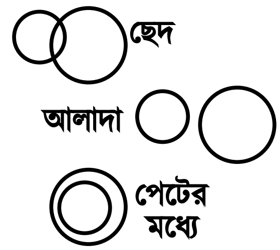


Fig 26

পারছ? ■

যদি স্পর্শ না করত, তবে কী করতাম? সেক্ষেত্রে ছবিটা হতে পারত Fig 26-এ দেখানো তিনটে কেসের কোনো একটার মত। এদের নিয়ে একটু গবেষণা করার জন্যই নীচের অংক কটা দিলাম।

Exercise 12: Let z_1 and z_2 be two complex numbers satisfying $|z_1-a_1|=r_1$ and $|z_2-a_2|=r_2$. Then what are the maximum and minimum values of $|z_1-z_2|$ if
(i) $a_1=0,\ r_1=2,\ a_2=1+i$ and $r_2=2$? (ii) $a_1=0,\ r_1=1,\ a_2=3i$ and $r_2=1$? (iii) $a_1=0,\ r_1=20,\ a_2=1+i$ and $r_2=2$?
■

8.3 প্রমাণ

আমরা এতক্ষণ ছবি দিয়ে চিন্তা করছিলাম। নীচের অংকে triangle inequality-র দ্বিতীয় সংস্করণের একটা রূপ ছবি ছাড়া প্রমাণ করতে দিয়েছে। অংকটা খুব জটিল কিছু নয়, কিন্তু একটা তথ্য আগেভাগে মাথায় না থাকলে অসুবিধা হতে পারে--যদি p,q দুটো real number হয়, যেখানে $p^2\le q^2$, তাহলেই কিন্তু জোর দিয়ে বলতে পারো না যে $p\le q$ হবে (যেমন $p=1$ আর $q=-2$ নিলে)। কিন্তু যদি $q\ge 0$ হয়, তবে এটা জোর দিয়ে বলা যায়, অর্থাৎ তথ্যটা হল--

> যদি $p,q\in\mathbb{R}$ এমন হয় যাতে $q\ge 0$ এবং $p^2\le q^2$, তাহলে অবশ্যই $p\le q$ হতে বাধ্য।

নীচের অংকটায় triangle inequality-এর দ্বিতীয় সংস্করণের একটা রূপের প্রমাণ চেয়েছে।

Example 9: যদি z_1,z_2 দুটি জটিল রাশি হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$. **(HS2013)**

SOLUTION:

> **ধরি** $z_1=x_1+iy_1$ **এবং** $z_2=x_2+iy_2$ **যেখানে** $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$.
> **দেখাতে হবে** $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

এবার আমরা সেই তথ্যটা কাজে লাগাব।

> **এখন** $\because |z_1|+|z_2|\ge 0$**, তাই এর জন্য** $|z_1+z_2|^2\le(|z_1|+|z_2|)^2$ **দেখানোই যথেষ্ট।**

এখানে দুটো জিনিস নিয়ে কাজ হচ্ছে, $|z_1+z_2|^2$ এবং $(|z_1|+|z_2|)^2$. দুটোকেই একটু সাজিয়ে নিলে সুবিধা হবে। প্রথমে $|z_1+z_2|^2$-কে সাজিয়ে নিই। মনে রেখো যেকোনো $w\in\mathbb{C}$-এর জন্যই $|w|^2=w\bar{w}$ হয়। অতএব--

একদিকে

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} \\ &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2), \end{aligned}$$

কারণ $z_1\bar{z}_2$ এবং $z_2\bar{z}_1$ পরস্পরের conjugate, আর কোনো $w \in \mathbb{C}$-এর সঙ্গে $\bar{w}$ যোগ করলে হয় $2\mathrm{Re}(w)$.
এবার $(|z_1|+|z_2|)^2$-কে নিয়ে পড়া যাক--

অন্যদিকে

$$(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|.$$

যাক, $|z_1+z_2|^2$ আর $(|z_1|+|z_2|)^2$ দুজনকেই ভদ্রভাবে লেখা গেছে। আমাদের উদ্দেশ্য ছিল $|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$ দেখানো। এর জন্য আমরা $(|z_1|+|z_2|)^2 - |z_1+z_2|^2$-কে দলাইমলাই করতে করতে ≥ 0 দেখাব।

সুতরাং

$$(|z_1|+|z_2|)^2 - |z_1+z_2|^2 = 2|z_1|\cdot|z_2| - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

এবার একটা ছোট্টো কৌশল, $|z_1|\cdot|z_2|$-কে $|z_1\bar{z}_2|$ বলে ভাবা যায়--

$$= 2|z_1\bar{z}_2| - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq 0,$$

কারণ যেকোনো $w \in \mathbb{C}$-এর জন্যই $|w| \geq \mathrm{Re}(w)$ হয়।

■

এই অংকটা থেকে আরেকটা জিনিসও পাওয়া যায়। সেটা হল কখন triangle inequality-তে "=" হয়। এখানে আমরা দেখলাম যে, triangle inequality-তে "≤"-টা আসছে $|z_1\bar{z}_2| \leq \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ থেকে। তাই triangle inequality-তে "=" আসা মানে $|z_1\bar{z}_2| = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ হওয়া। প্রথম অধ্যায়েই দেখেছি যে, কোনো $w \in \mathbb{C}$-এর জন্য $|w| = \mathrm{Re}(w)$ হয় একমাত্র তখনই, যখন w একটা non-negative real number হয়।
সুতরাং triangle inequality-তে "=" আসবে যখন $z_1\bar{z}_2$ হবে একটা non-negative real number. এই শর্তটা কেমন যেন বদখত দেখতে। ছবি দিয়ে ভাবার সময়ে আমরা এর চেয়ে সুন্দর একটা শর্ত পেয়েছিলাম, z_1 আর z_2 দুজনেরই তীর যদি একই অভিমুখে থাকে তবেই triangle inequality-তে "=" হয়। নীচের অংকে আমাদের বদখত শর্তটাকে দলাইমলাই করে সুন্দর জ্যামিতিক শর্তটায় পৌঁছব।

Example 10: z_1 এবং z_2 দুটি কাল্পনিক সংখ্যার জন্য $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ হলে প্রমাণ করো $\arg\ z_1 - \arg\ z_2 = 0$.[5] **(HS2018)**

SOLUTION: অংকটায় সামান্য লেখার ত্রুটি আছে। যেহেতু arg নিয়ে কথা বলছে, তাই ধরে নেওয়া উচিত ছিল যে $z_1, z_2 \neq 0$.
ছবি থেকে আমরা জানি যে, triangle inequality-র এই রূপটাতে "=" হয়, যখন z_1 আর z_2-র তীরচিহ্নদুটো একই দিকে মুখ[5] করে থাকে। তখন ওদের argument সমান হতে বাধ্য।
এই কথাটাকেই অংক কষে প্রমাণ করতে বলেছে এখানে। এর জন্য আমরা প্রথমে আগের অংকের সমাধানটা হুবহু করব। এ থেকে পাব--

[5] যেহেতু $z_1, z_2 \neq 0$ ধরে নিয়েছি, তাই ওদের তীরচিহ্নের অভিমুখ নিয়ে কোনো সমস্যা নেই।

> $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ **হলে** $|z_1\bar{z}_2| = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ **হবে।**
> **এখন আমরা জানি যে, কোনো** $w \in \mathbb{C}$**-এর বেলায়** $|w| = \mathrm{Re}(w)$ **হলে** w **একটা** non-negative real number **হতে বাধ্য। তাই এখানে** $z_1\bar{z}_2 > 0$.
> **আমরা ধরে নিয়েছি** $z_1, z_2 \neq 0$. **তাই** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} > 0$. **তাই** z_1 **আর** z_2**-কে তীরচিহ্ন হিসেবে ভাবলে ওদের অভিমুখ একই। সুতরাং ওদের** argument**-ও সমান হতে বাধ্য।**

■

DAY 9
Modulus নিয়ে কিছু অংক

Modulus-এর বেশ কিছু ধর্ম আমরা শিখেছি গতকাল। এবার সব কিছু মিলিয়ে কিছু অংক করার সময় এসেছে। আজকের অংকগুলো কোনোটাই পুরো করে দেব না, খালি কিছুটা ধরিয়ে ছেড়ে দেব।

Exercise 13: Let z be a complex number such that $|z| + z = 3 + i$ (where $i = \sqrt{-1}$). Then $|z|$ is equal to

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{41}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{34}}{3}$

(D) $\frac{5}{3}$

(jeemain.2019)
HINT:
এখানেও $i = \sqrt{-1}$ লিখেছে, তার বদলে $i^2 = -1$ লেখা উচিত ছিল। যাই হোক, বলে দিয়েছে $|z| + z = 3 + i$, সুতরাং $z = x + iy$ হলে $(x, y \in \mathbb{R})$ আমাদের দরকার

$$\sqrt{x^2+y^2} + x + iy = 3 + i.$$

এবার বাকিটুকু তুমি করো। ■

একদম একইরকম আরেকটা অংক দিলাম নীচে।

Exercise 14: Solve: $|z| + z = 2 + i$, where z is a complex number. **(CBSE2019-20)** ■

Exercise 15: Let z_1 and z_2 be any two non-zero complex numbers such that $3|z_1| = 2|z_2|$. If $z = \frac{3z_1}{2z_2} + \frac{2z_2}{3z_1}$, then

(A) $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}$

(B) $Re(z) = 0$

(C) $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$

(D) $Im(z) = 0$

(jeemain.2019)
HINT: প্রথমেই লক্ষ করো $\frac{3z_1}{2z_2}$ আর $\frac{2z_2}{3z_1}$ হল একটা আরেকটার reciprocal, মানে $\frac{3z_1}{2z_2}$-কে p বললে $\frac{2z_2}{3z_1}$ হবে $\frac{1}{p}$. যে শর্তটা দিয়েছে তাতে $|p| = 1$ হচ্ছে। সুতরাং $\frac{1}{p} = \bar{p}$ হবে (এটা ভালো করে চিন্তা করে বুঝে নাও[6])। সুতরাং z-টা দাঁড়াচ্ছে $p + \bar{p}$. এবার চিন্তা করো। ■

Exercise 16: A complex number z is said to be unimodular if $|z| = 1$. Suppose z_1 and z_2 are complex numbers such that $\frac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2}$ is unimodular and z_2 is not unimodular. Then the point z_1 lies on a

(A) straight line parallel to x-axis

(B) straight line parallel to y-axis

(C) circle of radius 2

(D) circle of radius $\sqrt{2}$

(jeemain.2015)
HINT: অংকটা দেখলেই বেশ ভয় হয়, এতরকম খটোমটো শর্ত রয়েছে। কিন্তু খালি হালকাভাবে চোখ বোলালেই একটা জিনিস লক্ষ করবে--এখানে z_1 আর z_2 দুটো জিনিস রয়েছে, শর্ত দিয়েছে দুটোকে নিয়েই, কিন্তু শেষ পর্যন্ত প্রশ্নটা দিয়েছে খালি z_1-কে নিয়ে। সুতরাং অনুমান করা যাচ্ছে যে, option নির্বাচনে z_2-এর আসলে কোনো ভূমিকা নেই। এরকম ক্ষেত্রে বুদ্ধিমানের কাজ হল z_2-র বদলে কোনো সত্যিকারের সংখ্যা বসিয়ে দেখা। এখানে z_2 বলে দিয়েছে unimodular হতে পারবে না। তা, unimodular নয় এরকম সবচেয়ে সহজ যে সংখ্যা চট্ করে মাথায় আসছে, সেটা হল $z_2 = 0$. এটা বসিয়ে দেখি কী হয়। এক্ষেত্রে $\frac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2} = \frac{z_1}{2}$ হয়ে যাচ্ছে। এটাকে unimodular হতে হবে, মানে $|z_1| = 2$ হতে হবে। চট্ করে option-গুলোর দিকে চোখ ফেরালেই উত্তরটা বুঝতে পারা উচিত।

বিকল্প পদ্ধতি

তা, এটা নেহাত ফাঁকি হল। যদি একটা option থাকত "None of the above", তবেই আর এই ফাঁকিটা খাটত না। সেক্ষেত্রে পুরো লিখে লিখে করতে হত। সেটা খুব একটা শক্ত নয়, প্রথমে $\left|\frac{z_1-2z_2}{2-z_1\bar{z}_2}\right| = 1$ শর্তটাকে লিখে নাও এইভাবে--

$$|z_1 - 2z_2|^2 = |2 - z_1\bar{z}_2|^2.$$

মনে আছে নিশ্চয়ই যে, যেকোনো $w \in \mathbb{C}$-এর জন্য $|w|^2 = w\bar{w}$ হয়? সেটা দুই পাশেই লাগাও। দ্যাখো কী আসে! ■

Exercise 17: Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z - 2 + i| \geq \sqrt{5}$. If the complex number z_0 is such that $\frac{1}{|z_0-1|}$ is the maximum of the set $\left\{\frac{1}{|z-1|} \ : \ z \in S\right\}$, then

$$\frac{4 - z_0 - \bar{z}_0}{z_0 - \bar{z}_0 + 2i}$$

is

[6] যেভাবে complex number দিয়ে ভাগ করে, সেটা করলেই পেয়ে যাবে।

(A) positive real number

(B) negative real number

(C) ai for some $a > 0$

(D) ai for some $a < 0$

HINT:

অংকটার খুঁটিনাটি নিয়ে মাথা ঘামাবার আগেই যেটাকে চোখ পড়া উচিত সেটা হল $z_0 + \bar{z}_0$ এবং $z_0 - \bar{z}_0$. এদের মধ্যে প্রথমটা purely real এবং দ্বিতীয়টা purely imaginary.
এবার খুঁটিনাটি দেখার পালা। প্রথমেই বুঝে নাও S দেখতে Fig 27-এর শেড করা অঞ্চলটার মত। এই set-এর মধ্যে $\frac{1}{|z-1|}$-এর maximum বার করতে বলেছে। তার মানে[7] $|z-1|$-এর minimum. অর্থাৎ S-এর মধ্যে যেই z-টা 1-এর সবচেয়ে কাছে আসবে, সেটাই হল z_0. সেটা দেখিয়েছি Fig 28-এ। ছবি দেখেই z_0-এর real আর imaginary অংশ নিয়ে কিছুটা আন্দাজ করা যাচ্ছে। এটুকুর ভিত্তিতেই দ্যাখো তো অংকটা করতে পারো কিনা।
■

Exercise 18: z_1, z_2 are two complex numbers with $z_2 \neq 0$ and $z_1 \neq z_2$ and satisfying $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = 1$. Then $\frac{z_1}{z_2}$ is

(A) real and negative

(B) real and positive

(C) purely imaginary

(D) none of the above need to be always true.

(ISI2016)

HINT:

বলে দিয়েছে $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = 1$. তার মানে $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. এবার দুপাশকে $|z_2|$ দিয়ে ভাগ করে দাও (যেহেতু $z_2 \neq 0$, তাই সেটা করা যাবে)। তবে পাবে $|w+1| = |w-1|$, যেখানে $w = \frac{z_1}{z_2}$. তার মানে, w হল 1 আর -1 থেকে সমদূরবর্তী। এবার ছবি দিয়ে ভাবো।
■

Exercise 19: Let z be a complex number such that $\frac{z-i}{z-1}$ is purely imaginary. Then the minimum value of $|z - (2+2i)|$ is

[7] যেহেতু $x > 0$-এর জন্য x কমলে $\frac{1}{x}$ বাড়ে, তাই $\frac{1}{x}$-এর maximum বার করা আর x-এর minimum বার করা একই কথা।

Fig 27

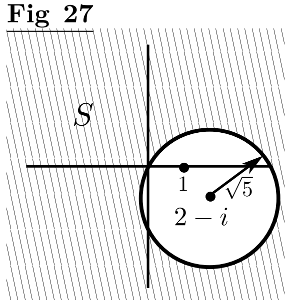
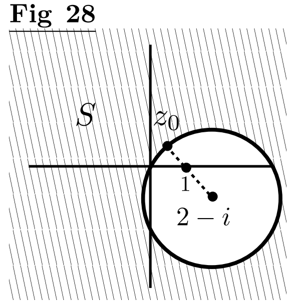


Fig 28



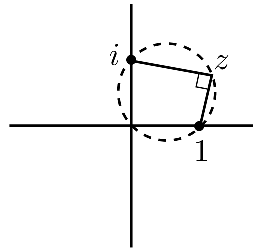


Fig 29

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ISI2017)

HINT:

আমরা অংকটা দুভাবে করার কায়দা বলব। এক, ছবি দিয়ে, আর দুই, অংক কষে। ছবি দিয়ে করার জন্য গত অধ্যায় থেকে একটা জিনিস মনে করিয়ে দিই--যদি $z_1, z_2 \neq 0$ এমন দুটো complex number হয়, যাতে $\frac{z_1}{z_2}$ হয় purely imaginary, তবে তীরচিহ্ন হিসেবে ভাবলে z_1 আর z_2-র তীর দুটো পরস্পরের সঙ্গে right angle-এ থাকবে। সুতরাং "$\frac{z-i}{z-1}$ is purely imaginary" শর্তটা থেকে Fig 29 পাচ্ছি। তাহলে কি বুঝতে পারছ z বিন্দুটা কোথায় কোথায় থাকতে পারে? একটা semicircle-এর ভিতরের কোণ যে right angle হয়, মনে আছে তো?

বিকল্প পদ্ধতি

এবার একই অংক ছবি ছাড়া করার একটা কায়দা বলি। প্রথমে $z = x + iy$ নিয়ে শুরু করো, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. তাহলে

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{x+i(y-1)}{(x-1)+iy} = \frac{(x+i(y-1))((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2}.$$

এটা purely imaginary হবে যখন এর real part শূন্য হবে, মানে $x(x-1)+y(y-1)=0$ হবে। এটাকে একটু ঘুরিয়ে লিখলে একটা পরিচিত জিনিসের equation পাবে-- আমাদের কাজ করতে বলেছে $|z-(2+2i)|$ নিয়ে, মানে $2+2i$ ■

DAY 10
Argument-এর বিশদ আলোচনা (প্রথম পর্ব)

Modulus এবং argument-এর কথা আমরা প্রথম অধ্যায়েই শিখেছি। Modulus-এর বিশদ আলোচনাও হয়েছে এই অধ্যায়ের শুরুতে। এবার আমরা argument-এর সম্পর্কে আরো বিশদভাবে জানব। এর জন্য গোড়াতেই জানা দরকার set-valued function বলে একটা ধারণার কথা।

10.1 Set-valued function

কোনো জিনিস $360°$ (মানে 2π radian) ঘোরার পরে আবার গোড়ার অবস্থানেই ফিরে আসে। সুতরাং কোনো $z \in \mathbb{C}$-এর argument যদি $30°$ হয় (Fig 30), তবে argument-টা $360° + 30° = 390°$-ও বটে (Fig 31), আবার

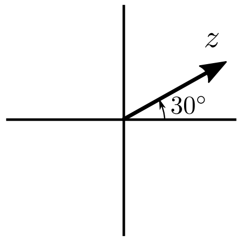


Fig 30

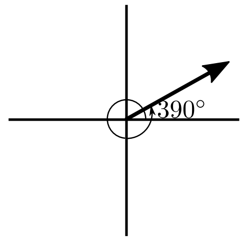


Fig 31

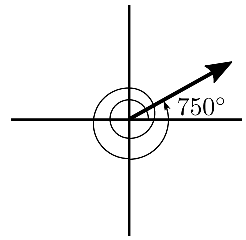


Fig 32

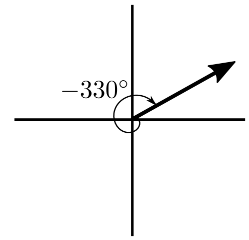


Fig 33

$2 \times 360^\circ + 30^\circ = 750^\circ$ হতেও আটক নেই (Fig 32)! এমন কি Fig 33-এর মত $30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$ বললেই বা ঠেকাচ্ছে কে? আসলে এখানে $\arg(z)$ হল একটা set,

$$\{30^\circ + n \times 360^\circ \;:\; n \in \mathbb{Z}\},$$

বা radian-এ প্রকাশ করলে

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

সেই কারণে $\arg(z)$-কে আমরা বলি একটা **set-valued function,** অর্থাৎ এমন একটা function যার value হল একটা set. কেউ কেউ এটাকে **multi-valued function**-ও বলে থাকেন।

Exercise 20: প্রতি ক্ষেত্রে $\arg(z)$ বার করো (তীরচিহ্ন দিয়ে ছবি এঁকে নিলে সুবিধা হতে পারে)।
(*i*) $z = i$, (*ii*) $z = 1$, (*iii*) $z = -1$, (*iv*) $z = -i$, (*v*) $z = 1 + i$. ■

সেই যে Wessel বলেছিলেন দুটো complex সংখ্যাকে গুণ করলে তাদের কোণ দুটো যোগ হয়ে যায়, সেটা আমরা arg ব্যবহার করে লিখতে পারি এইভাবে--যে কোনো $z_1, z_2 \neq 0$-র জন্যই

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

এর দুদিকই কিন্তু একেকটা set. এর মানে হল--

> যদি তুমি $\arg(z_1)$-এর যেকোনো একটা সদস্য এবং $\arg(z_2)$-এর যেকোনো একটা সদস্য নাও, এবং তাদের যোগ করো, তবে যোগফলটা $\arg(z_1 z_2)$-এর একটা সদস্য হতে বাধ্য। বিপরীতপক্ষে, যদি $\arg(z_1 z_2)$-এর যেকোনো একটা সদস্য নাও, তবে তাকে তুমি এমনভাবে দুই অংশে ভাঙতে পারবে, যাতে প্রথম অংশটা $\arg(z_1)$-এর মধ্যে এবং দ্বিতীয় অংশটা $\arg(z_2)$-এর মধ্যে থাকে।

এই প্রসঙ্গে $\mathbb{C}$-এর বিভিন্ন subset-দের যোগ, বিয়োগ ইত্যাদির সংজ্ঞা শিখে রাখো--

- যখনই দেখবে $A + B$ লেখা হয়েছে, যেখানে $A, B \subseteq \mathbb{C}$, তখনই জানবে এর সংজ্ঞা হল

  $$A + B = \{a + b \;:\; a \in A, b \in B\}.$$

  লক্ষ করো, এখানে A-র <u>সব</u> element-এর সঙ্গে B-র <u>সব</u> element যোগ করা হচ্ছে। যেমন--

  $A = \{1 - i, 2 - 4i\}$ এবং $B = \{-1 + 4i, i\}$ নিলে $A + B$-এর সদস্যরা হবে--

  $$\begin{aligned} (1 - i) + (-1 + 4i) &= 3i \\ (1 - i) + i &= 1 \\ (2 - 4i) + (-1 + 4i) &= 1 \\ (2 - 4i) + i &= 2 - 3i. \end{aligned}$$

  সুতরাং $A + B = \{3i, 1, 2 - 3i\}$.

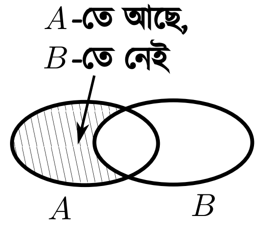


Fig 34

- যদি $A - B$ দ্যাখো, তার মানে হল

$$A - B = \{a - b \ : \ a \in A, b \in B\}.$$

যেমন--

$A = \{1, i\}$, $B = \{1, 2\}$ নিলে $A - B$-এর সদস্যরা হবে--

$$\begin{aligned} &1 - 1 = 0 \\ &1 - 2 = -1 \\ &i - 1 \\ &i - 2. \end{aligned}$$

অর্থাৎ $A - B = \{0, -1, i - 1, i - 2\}$.

অনেক সময়ে লোকে $A - B$ বলতে বোঝায় A-র সেই সব সদস্যদের set, যারা B-এর মধ্যে নেই (Fig 34)। তবে আমরা এখানে তা বোঝাব না। যদি কখনও Fig 34-এর set-টাকে বোঝাতে হয়, তবে আমরা লিখব $A \setminus B$ (যাকে মুখে বলে A setminus B)।

- আবার যদি $r \in \mathbb{C}$ আর $A \subseteq \mathbb{C}$ হয়, তবে rA মানে হল

$$rA = \{ra \ : \ a \in A\}.$$

যেমন--

$r = i$ আর $A = \{1, i\}$ নিলে, $rA = \{i \times 1, i^2\} = \{i, -1\}$ হবে।

- একইভাবে $A^2 = \{a^2 \ : \ a \in A\}$. যেমন $A = \{-1, 1, i\}$ হলে $A^2 = \{-1, 1\}$.

এখানে কয়েকটা ব্যাপারে সাবধান। সেগুলো একে একে উদাহরণ দিয়ে বলি।

Example 11: যদি কোনো $A \subseteq \mathbb{C}$ নাও, আর $B = \phi$ নাও, তবে $A + B$ কী হবে? এখানে ϕ হল empty set.

SOLUTION: হঠাৎ মনে হতে পারে যে, $A + \phi$ বোধহয় A-ই হবে। কিন্তু তা নয়। আসলে $A + B = \phi$ হবে, কারণ $A + B$-এর প্রতিটা সদস্যই দেখতে $a + b$-এর মত যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$. যেহেতু এখানে B-এর মধ্যে কোনো b-ই নেই, তাই $A + B$-এর ভাঁড়ারও শূন্য। ■

Example 12: যদি $A = \{1, i\}$ হয়, তবে $A - A = ?$

SOLUTION: যদি ভেবে থাকো যে, উত্তরটা হবে ϕ বা $\{0\}$, তবে খুব ভুল করেছ, কারণ--

$$A - A = \{1-1, 1-i, i-1, i-i\} = \{0, 1-i, i-1\}.$$

■

Example 13: যদি $A \subseteq \mathbb{C}$ হয়, তবে $A + A$ আর $2A$ কি একই জিনিস?

SOLUTION: মোটেই না! যেমন ধরো $A = \{0, 1\}$ হলে $A + A = \{0+0, 0+1, 1+0, 1+1\} = \{0, 1, 2\}$ হবে। কিন্তু $2A = \{0, 2\}$. ■

এই শেষের উদাহরণের যুক্তিতেই বুঝবে যে, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ হলেও $z_1 = z_2 = z$-র জন্য $\arg(z^2)$ মোটেই $2\arg(z)$-এর সমান হবে না, কারণ $\arg(z) + \arg(z)$ মোটেই $2\arg(z)$ নয়! নীচের অংকটা করলেই সেটা বুঝতে পারবে।

Exercise 21: ধরো $z = i$ নিলাম। তবে $\arg(z)$ আর $\arg(z^2)$ বার করো। চিন্তা করে বলো, $3\pi \in \arg(z^2)$ কিনা। এবার দ্যাখো $3\pi \in 2\arg(z)$ হচ্ছে কিনা! ■

এই সব কারণে বুঝতেই পারছ, set-valued function-দের নিয়ে কাজ করা অনেক সময়েই অসুবিধাজনক। তাই লোকে একটা কৌশল করেছে। এবার সেইটা শিখব।

10.2 Principal argument

আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে, যদি $z \neq 0$ হয়, তবে $\arg(z)$ হল একটা set. লোকে অনেক সময়ে পুরো set-টা নিয়ে কাজ না করে খালি একটা বিশেষ সদস্যকে নিয়ে কাজ করে। সেই বিশেষ সদস্যটাকে নির্বাচন করা হয় একটা বাড়তি শর্ত চাপিয়ে। ব্যাপারটা অনেকটা কোনো fraction-কে যথাসম্ভব কাটাকাটি করে লেখার মত। যেমন, আমরা "অর্ধেক" নামক fraction-টাকে $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{25}{50}$ ইত্যাদি অনেক রূপেই লিখতে পারি। কিন্তু অধিকাংশ সময়েই আমরা লেখার সময়ে একটা বিশেষ রূপই ব্যবহার করি, $\frac{1}{2}$, যেখানে উপরনীচে যতটা সম্ভব কাটাকাটি করে নেওয়া হয়েছে। এই বাড়তি শর্তটুকু চাপালে যেকোনো fraction-এরই ঠিক একটাই রূপ পাওয়া যায়[8]। তেমনি, argument-এর বেলাতেও আমরা সাধারণতঃ একটা বাড়তি শর্ত চাপাই--কোণটাকে $(-\pi, \pi]$-এর মধ্যে থাকতে হবে, অর্থাৎ $> -\pi$ এবং $\leq \pi$ হতে হবে (Fig 35)। যেমন ধরো $\arg(i) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}$. এর সদস্যরা 2π অন্তর অন্তর রয়েছে, তাই $(-\pi, \pi]$-এর মধ্যে খালি একটাই সদস্য পাওয়া যাবে, সেই বিশেষ সদস্যটা হল $\frac{\pi}{2}$. বাড়তি শর্তটা চাপানোর ফলে এই যে কোণটা পাওয়া গেল, তাকে লোকে লেখে **Argument** বা $\mathrm{Arg}(z)$. যেমন $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$. এখানে বড় হাতের 'A'-টা লক্ষ করো। মুখে বলার সময়ে বলে **principal argument**. অংকের দুনিয়ায় এটাই স্বীকৃত notation হলেও কিছু কিছু পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে দেখেছি $\arg(z)$ দিয়েই principal argument বোঝাচ্ছে। তাই একটু সাবধান থেকো।

[8] এখানে আমরা খালি positive সংখ্যা নিয়েই কথা বলছি।

Fig 35

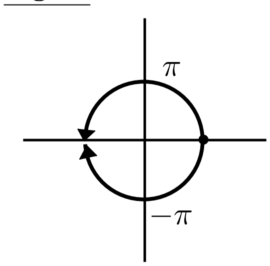
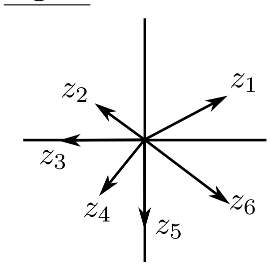


Fig 36



Fig 37



নীচের অংক কয়টা তোমাকে Arg(z) বার করা শেখানোর জন্য। প্রতিক্ষেত্রেই একটা ছবি মাথায় রাখবে। Arg(z) বার করার জন্য মনে করো যেন তুমি একটা তীরচিহ্ন নিয়ে শুরু করছ, যেটা positive real axis বরাবর মুখ করে আছে (Fig 36)। তোমার কাজ হল তীরচিহ্নটাকে ঘুরিয়ে z-এর দিকে তাক করা। এই ঘোরানোর সময়ে কোনোভাবেই negative real axis-টাকে টপকানো চলবে না। তাহলে যত কোণে তীরটাকে ঘোরাতে হবে, সেটাই হবে Arg(z). ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে হলে positive আর ঘড়ির কাঁটার দিকে হলে negative. যদি z-টা একেবারে negative real axis-এর উপরে থাকে, তবে $\text{Arg}(z) = \pi$ হবে। মনে রেখো এ সবই হল $z \neq 0$-র জন্য। যদি $z = 0$ হয়, তবে Arg(z) হল undefined.

Exercise 22: Fig 37-এ দেখানো বিভিন্ন z_i-এর জন্য বলো, কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে Arg(z)-টা positive আর কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে negative. ■

Exercise 23: আবার Fig 37-এর দিকে তাকাও। এবার বলো কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে $|\text{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{2}$, আর কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে $\frac{\pi}{2} < |\text{Arg}(z)| \leq \pi$. ■

Arg(z) বার করার সময়ে complex plane-কে দুটো axis আর চারটে **quadrant**-এ ভেঙে কল্পনা করলে সুবিধা হয় (Fig 38)। যেহেতু Arg(0) হল undefined, তাই origin-কে হিসেব থেকে বাদ রাখব। তাহলে axis-গুলোও দু টুকরো হয়ে যাবে--positive আর negative হিসেবে। একটু চিন্তা করলেই বুঝবে complex plane-এর কোন্ অংশে থাকলে Arg(z) কী রকম হয়--

z কোথায় আছে	Arg(z) কোথায় আছে
quadrant I	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
quadrant II	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
quadrant III	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$
quadrant IV	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

z কোথায় আছে	Arg(z) কত
positive real axis	0
negative real axis	π
positive imaginary axis	$\frac{\pi}{2}$
negative imaginary axis	$-\frac{\pi}{2}$

একটা $z \in \mathbb{C}$ কোন্ quadrant বা axis-এর উপর আছে, সেটা তার real আর imaginary অংশের চিহ্নগুলো দেখেই বলে দেওয়া যায়, যেমন $2+3i$-এর বেলায় দুটোই positive, তাই quadrant I-এ থাকবে। নীচের অংকটা করে দেখে নাও ব্যাপারটা মাথায় ঢুকেছে কি না।

Exercise 24: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে z-টা কোন্ quadrant-এ বা কোন্ axis-এর কোন্ অর্ধেকে আছে বলো।
$(i)\ 2-3i \quad (ii)\ -2-i \quad (iii)\ -3i \quad (iv)\ -\pi \quad (v)\ \cos 220° + i \sin 220° \quad (vi)\ (1+i)^2$
■

Exercise 25: Fig 39-এ যে z-টা দেখানো আছে, তার জন্য Arg(z)-কে θ দিয়ে প্রকাশ করো। ■

Fig 38

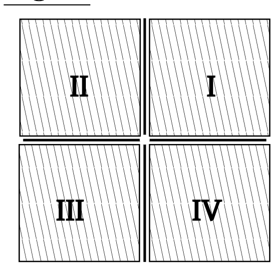
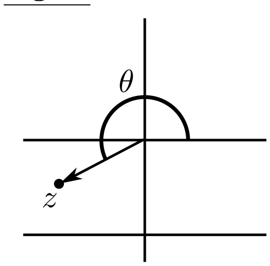


Fig 39



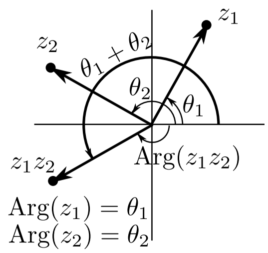


Fig 40

মনে রেখো, $\arg(z)$ একটা set, যার সদস্যরা 2π দূরত্ব অন্তর অন্তর রয়েছে। তাই যদি $\arg(z)$-এর একটা কোনো সদস্য হয় θ, অমনি বাকিদেরও হদিশ পেয়ে যাবে--

$$\arg(z) = \{\theta + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

এই ব্যাপারটা কাজে লাগিয়ে আমরা $\mathrm{Arg}(z)$ থেকে $\arg(z)$ বার করে ফেলতে পারি অনায়াসে। যেহেতু $\mathrm{Arg}(z)$ হল $\arg(z)$-এর একটা সদস্য, তাই--

যেকোনো $z \neq 0$-এর জন্যই $\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

যদিও $\arg(z)$ হল একটা set-valued function, কিন্তু $\mathrm{Arg}(z)$ হল $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা সাধারণ function[9]। সেই কারণে মনে হতে পারে যেন $\arg(z)$-এর চেয়ে $\mathrm{Arg}(z)$ নিয়ে কাজ করা বেশী সহজ। কিন্তু দুঃখের কথা সবসময়ে তা নয়। যেমন আমরা দেখেছি যে, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ হয়। কিন্তু $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ আর $\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$ সমান নাই হতে পারে। যেমন, Fig 40-এর z_1 আর z_2-কে দ্যাখো। এখানে $\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$ কিন্তু π-এর থেকে বড় হয়ে যাচ্ছে। তাই $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$-টা negative হয়ে যাবে। এই সমস্যাটা তেমন কিছু গুরুতর মনে নাই হতে পারে, কিন্তু অনেক সময়ে অন্য অংকের পেটের ভিতরে ঢুকে মহা ঝঞ্ঝাট বাঁধায়। এরকম উদাহরণ আমরা পরে দেখব।

DAY 11
Argument-এর বিশদ আলোচনা (দ্বিতীয় পর্ব)

11.1 $\mathrm{Arg}(z)$ বার করা

ধরো $z = x + iy$, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$. আমরা $\mathrm{Arg}(z)$-কে x আর y দিয়ে লিখতে চাই। যদি Fig 41-এর দিকে তাকাও, তবে মনে হবে যেন $\mathrm{Arg}(z)$ হচ্ছে $\tan^{-1}\frac{y}{x}$. এই ফর্মুলাটা কিন্তু সব সময়ে খাটে না। তার একটা কারণ হল $x = 0$ হয়ে

[9]এখানে $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ মানে যাবতীয় nonzero complex number-এর set.

Fig 41

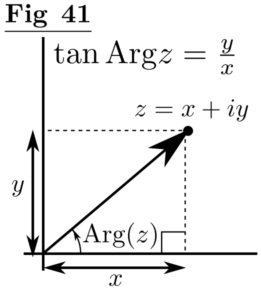
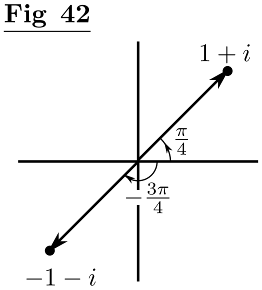


Fig 42



গেলে x দিয়ে ভাগ করা যাবে না, এবং আরেকটা কারণ হল $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ সর্বদা $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-এর মধ্যে থাকে, কিন্তু $\operatorname{Arg}(z)$ নড়াচড়া করে $(-\pi, \pi]$-এর মধ্যে। একটা উদাহরণ নিলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 14: যদি $z_1 = 1 + i$ আর $z_2 = -1 - i$ নাও (Fig 42), তবে $\operatorname{Arg}(z_1)$ আর $\operatorname{Arg}(z_2)$ বার করো।

SOLUTION: এখানে $\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$ আর $\operatorname{Arg}(z_2) = -\frac{3\pi}{4}$. অথচ দুইক্ষেত্রেই $\frac{y}{x} = 1$ (প্রথম ক্ষেত্রে $x = y = 1$ আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x = y = -1$)। আমরা জানি $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$. তাই $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ দুই ক্ষেত্রেই $\frac{\pi}{4}$. ■

দুঃখের কথা, x, y দেওয়া থাকলে $\operatorname{Arg}(z)$ বার করার কোনো ছোট্টো ফর্মুলা নেই, কেস ধরে ধরে করতে হয়। মোট আটটা কেসে ভেঙে বললে খেয়াল রাখতে সুবিধা হবে। আটটা কেস হল পুরো complex plane-এর সেই আটটা অংশের জন্য (চারটে quadrant আর axis দুটোর positive আর negative অংশ)। যথারীতি আমরা origin-কে হিসেবে ধরছি না, কারণ $\operatorname{Arg}(z)$ হল undefined. এতগুলো কেস শুনে ঘাবড়ে যেও না। আমরা একটু পরেই এগুলোকে ছবি দিয়ে মনে রাখার কায়দা বোঝাব। প্রতিটা কেসেই আমরা $z = x + iy$ নিয়ে কাজ করছি, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$.

- Case 1: Positive real axis: (অর্থাৎ $x > 0$ এবং $y = 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = 0$.
- Case 2: Negative real axis: (অর্থাৎ $x < 0$ এবং $y = 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = \pi$.
- Case 3: Positive imaginary axis: (অর্থাৎ $x = 0$ এবং $y > 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$.
- Case 4: Negative imaginary axis: (অর্থাৎ $x = 0$ এবং $y < 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.
- Case 5: Quadrant I: (অর্থাৎ $x > 0$ এবং $y > 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
- Case 6: Quadrant II: (অর্থাৎ $x < 0$ এবং $y > 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
- Case 7: Quadrant III: (অর্থাৎ $x < 0$ এবং $y < 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
- Case 8: Quadrant IV: (অর্থাৎ $x > 0$ এবং $y < 0$) : এক্ষেত্রে $\operatorname{Arg}(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.

চাইলে কয়েকটা কেসকে মিলিয়ে দেওয়া যেত, কিন্তু সেটা করি নি, কারণ তাতে কেসের সংখ্যা কমত বটে, তবে পুরো ব্যাপারটার ছন্দটা নষ্ট হয়ে যেত। প্রতিক্ষেত্রে একটা করে ছবি এঁকে দেখলেই ব্যাপারটা সহজে মাথায় ঢুকবে। Fig 43 দেখলেই প্রথম চারটে কেস মনে থাকবে। বাকি চারটে কেসের জন্য খালি একটা ব্যাপার মনে রাখলেই হবে। যদি z-টা quadrant I বা quadrant IV-এ থাকে, তবে খালি $\tan^{-1}\frac{y}{x}$-এই কাজ হয়ে যাবে। কিন্তু যদি z-টা গিয়ে পড়ে quadrant II বা quadrant III-তে, তবে z-এর তীরচিহ্নটাকে পিছন দিকে বাড়িয়ে দিলেই দেখবে যে, লেজটা quadrant IV বা I-এ এসে পড়ছে (Fig 44)। সুতরাং $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ লাগালেই লেজের দিকটা বেরিয়ে যাবে। এবার তোমার কাজ হল লেজটাকে $180°$ ঘুরিয়ে মুখের দিকে নিয়ে যাওয়া। খালি সাবধান থাকতে হবে যেন ঘোরানোর সময়ে লেজটা ওই "no crossing" লাইনটাকে পার না করে। যদি z-টা quadrant II-তে থাকে, তবে এর জন্য Fig 45-এর মত $180°$ ঘোরাতে হবে ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে (মানে $+\pi$)। একইভাবে Fig 46 দেখলে বুঝবে z-টা quadrant III-তে থাকলে কেন $-\pi$ করতে হবে।

Fig 43

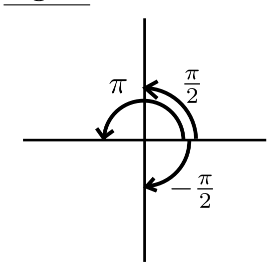


Fig 44

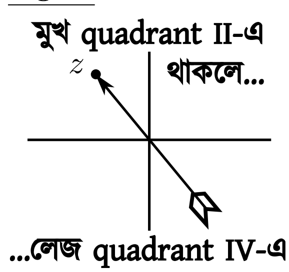


Fig 45

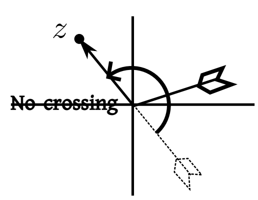
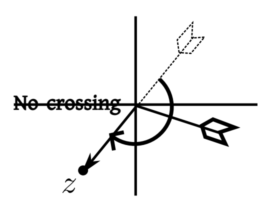


Fig 46



Example 15: $-1-i$-এর মুখ্য কোণাঙ্ক (principal amplitude) নির্ণয় করো। [2] **(HS2018)**

SOLUTION:**Amplitude** (অ্যামপ্লিটিউড) হল argument-এরই প্রতিশব্দ। যেকোনো argument বার করার অংকেই সাধারণতঃ প্রথমেই প্রথমে বুঝে নিলে সুবিধা হয় যে কোন্ quadrant-এ কাজ হচ্ছে। এখানে real অংশ হল -1, আর imaginary অংশও হল -1. যেহেতু দুজনেই <0, তাই $-1-i$ আছে quadrant III-এ।

> **যেহেতু** $-1-i$ **রয়েছে** quadrant III**-এ। আমরা জানি যে, এই** quadrant**-এর যেকোনো** $z=x+iy$**-এর জন্যই** $\text{Arg}(z)=-\pi+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ **হয়, যেখানে** $x,y\in\mathbb{R}$.
> **এখানে** $x=y=-1$. **তাই** $\text{Arg}(-1-i)=-\pi+\tan^{-1}\frac{-1}{-1}=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$.

■

Exercise 26: $-3-\sqrt{3}i$ জটিল রাশিটির অ্যামপ্লিটিউডের মুখ্যমান নির্ণয় করো।[2] **(HS2015)**
HINT: এখানেও আগের অংকের মতই প্রথমে quadrant-টা ঠিক করে নাও। ■

Exercise 27: $-3-3i$ জটিল রাশিটির আর্গুমেন্ট নির্ণয় করো। **(HS2013)**
HINT: এখানে কিন্তু principal argument চায় নি। তবে principal argument বার করেই শুরু করো। তারপর $2n\pi$ যোগ কোরো। ■

নীচের অংকটাও একইরকম, তবে সামান্য একটু জটিলতা আছে।

Exercise 28: $1+i\tan\frac{4\pi}{7}$-এর মডিউলাস এবং আর্গুমেন্টের মুখ্যমান (principal value of argument) নির্ণয় করো। **(HS2011)**
HINT:
লক্ষ করো $\frac{4\pi}{7}$ হল $\frac{\pi}{2}$)-এর চেয়ে সামান্য বড়। যদি $\frac{\pi}{2}$-কে $\frac{4\pi}{8}$ বলে ভাবো, অমনি সেটা চট্ করে বুঝবে। তাই তার tan হবে <0 এবং cos-ও হবে <0. এটা কী করে বুঝলাম? অনেক সময়ে লোকে all-sin-tan-cos বলে একটা মন্ত্র মুখস্থ করে রাখে। সেখান থেকে এটা পাওয়া যায়। তবে আমার পরামর্শ হল $\tan x$ আর $\cos x$-এর গ্রাফের সঙ্গে আগেভাগে পরিচয় থাকা ভালো (Fig 47 আর Fig 48)। সেখান থেকেও বুঝবে যে $\tan\frac{4\pi}{7}<0$ আর $\cos\frac{4\pi}{7}<0$.
আর argument বার করার সময়ে Fig 49-এর দিকে চোখ রাখলে সুবিধা হতে পারে।
■

যদি কোনো complex number-কে $\cos\theta+i\sin\theta$ আকারে দেওয়া থাকে, তবে তার arg বার করা খুবই সহজ, $\{\theta+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. সেখান থেকে Arg বার করে ফেলাও কঠিন নয় মোটেই। নীচের অংকগুলো সেই কায়দাতেই চেষ্টা করতে পারো, যদিও অন্যভাবেও করা যেতে পারে।

Fig 47

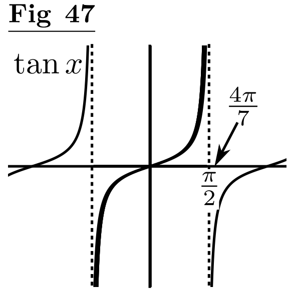


Fig 48

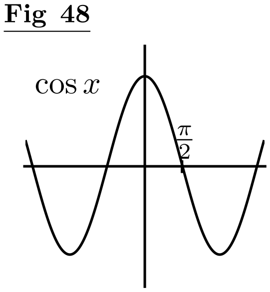
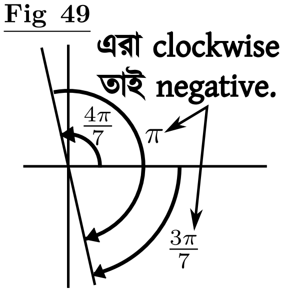


Fig 49



Exercise 29: নীচের প্রতিক্ষেত্রে $\text{Arg}(z)$ বার করো।
(i) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, (ii) $\sin\frac{4\pi}{3}+i\cos\frac{4\pi}{3}$, (iii) $\tan\frac{4\pi}{3}+i$, (iv) $\tan\frac{4\pi}{3}-i$.
■

এবারের অংকটার একটা রূপ আমরা আগেই দেখেছি Exercise 17-এ (55 নম্বর পাতায় বা তার কাছাকাছি কোথাও)।

Exercise 30: Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z-2+i|\geq\sqrt{5}$. If the complex number z_0 is such that $\frac{1}{|z_0-1|}$ is the maximum of the set $\left\{\frac{1}{|z-1|}\ :\ z\in S\right\}$, then the principal argument of

$$\frac{4-z_0-\bar{z}_0}{z_0-\bar{z}_0+2i}$$

is

(A) $-\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{3\pi}{4}$

(jeeadv.p1.2019)
HINT:
Exercise 17 যদি না করে থাকো, তবে প্রথমে সেটা করো। তাহলেই দেখবে $\frac{4-z_0-\bar{z}_0}{z_0-\bar{z}_0+2i}$ আছে negative imaginary axis-এর উপরে। এবার তুমিই বলো principal argument-টা কী হবে! ■

এবার একটা সম্পূর্ণ অন্য স্বাদের অংক।

Example 16: ধরো তোমাকে $(\cos 37^\circ+i\sin 37^\circ)^{100}$-কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করতে বললাম, যেখানে $A,B\in\mathbb{R}$. কী করে করবে?
SOLUTION: কাজটা যদি খালি $i^2=-1$ ব্যবহার করে করতে যাও, তবে মাথা খারাপ হবার জোগাড় হবে। কিন্তু যদি তীরচিহ্ন দিয়ে করো, তবে অনেক সহজ। প্রথমে $z=\cos 37^\circ+i\sin 37^\circ$-এর তীরচিহ্নটা এঁকে নাও (Fig 50)। এর modulus হল $\cos^2 37dg+\sin^2 37^\circ=1$, এবং একটা argument হল 37°. সুতরাং Wessel-এর কায়দায় ভাবলেই বুঝবে যে, z-এর মাথায় power চাপাবে, ততই তীরচিহ্নটা 37° করে ঘুরতে থাকবে (Fig 51)। Modulus-টা সর্বদাই 1-ই থাকবে, কারণ 1-এর power-গুলোও সব 1-ই। কিন্তু 100 বার ঘোরার পর argument-টা হবে $100\times 37^\circ=3700^\circ$. যেহেতু এক পাক ঘুরে এলে আবার গোড়ার অবস্থানেই ফিরে আসা হয়, তাই 3700° না লিখে সেটাকে 360° দিয়ে ভাগ করে

Fig 50

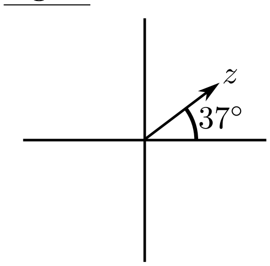
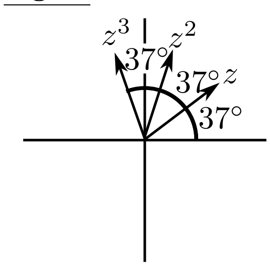


Fig 51



ভাগশেষটুকু রাখলেই হবে, এবং সে ভাগশেষটা হল $100°$. সুতরাং উত্তর হল $\cos 100° + i\sin 100°$. ■

11.2 $\text{Arg}(z)$ এবং $\arg(z)$-এর যোগ বিয়োগ

যদি $z_1, z_2 \neq 0$ হয়, তবে Wessel বলেছিলেন যে, $z_1 z_2$-এর argument হবে z_1 আর z_2-এর argument-এর যোগফল। আমরা আগেই দেখেছি যে, ব্যাপারটায় একটু সমস্যা আছে--

- যদি arg নিয়ে কাজ করি, তবে যোগটা হল set-এর যোগ,
- আর যদি Arg নিয়ে কাজ করি, তবে $\text{Arg}(z_1 z_2)$ কিন্তু $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ নাও হতে পারে।

এইসব মিলিয়ে মাথায় মাঝে মাঝেই গোল বেঁধে যায়। যেমন নীচের অংকটায়।

Example 17: প্রমাণ করো $\text{amp}(z) - \text{amp}(-z) = \pm\pi$ যখন $\text{amp}(z)$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হবে, (z একটি জটিল রাশি)। [5] **(HS2015)**

SOLUTION: এখানে amp হল amplitude-এর সংক্ষিপ্ত রূপ, এবং amplitude হল argument-এর প্রতিশব্দ। সুতরাং মনে হতে পারে যেন $\text{amp}(z)$ বলতে $\arg(z)$ বোঝানো হচ্ছে। কিন্তু সেক্ষেত্রে অংকটা ভুল, কারণ তাহলে $\text{amp}(z) - \text{amp}(-z)$-এ অসংখ্য সদস্য থাকত।
আসলে এখানে $\text{amp}(z)$ বলতে $\text{Arg}(z)$ বোঝাতে চেয়েছে। সেটা লিখে শুরু করাই ভালো।

> **আমরা ধরে নিচ্ছি** $\text{amp}(z)$ **বলতে** principal argument **অর্থাৎ** $\text{Arg}(z)$ **বোঝানো হচ্ছে।**
> **আমাদের দেখাতে হবে--**
>
> $$\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = \begin{cases} \pi & \textbf{যদি } \text{Arg}(z) > 0 \\ -\pi & \textbf{যদি } \text{Arg}(z) < 0 \end{cases}.$$

লক্ষ করো, $\text{Arg}(z) = 0$ হলে কী হবে, সে বিষয়ে এখানে কোনো বক্তব্য নেই। আমরা এক্ষুনি $\text{Arg}(z)$-এর ফর্মুলা ব্যবহার করতে চলেছি, তাই z-কে $x + iy$ বলে ভাবলে সুবিধা হবে--

> **ধরি** $z = x + iy$ **যেখানে** $x, y \in \mathbb{R}$.
> **যদি** $\text{Arg}(z) > 0$ **হয়, তবে** z **থাকবে** quadrant I **বা** quadrant II **বা** positive imaginary axis **বা** negative real axis**-এর উপরে।**

বোঝার জন্য Fig 52 দেখে নাও।

Fig 52

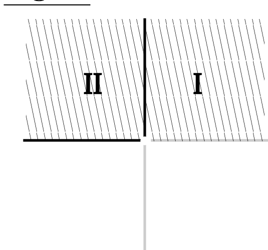
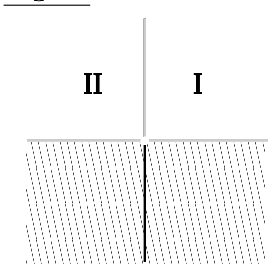


Fig 53



> **প্রথম ক্ষেত্র**: $z \in$ quadrant I: **সুতরাং** $-z \in$ quadrant III.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = \pi$.
>
> **দ্বিতীয় ক্ষেত্র**: $z \in$ positive imaginary axis: **সুতরাং** $-z \in$ negative imaginary axis.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = -\frac{\pi}{2}$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = \pi$.
>
> **তৃতীয় ক্ষেত্র**: $z \in$ quadrant II: **সুতরাং** $-z \in$ quadrant IV.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = \pi$.
>
> **চতুর্থ ক্ষেত্র**: $z \in$ negative real axis: **সুতরাং** $-z \in$ positive real axis.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = \pi$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = 0$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = \pi$.

এবার $\text{Arg}(z) < 0$ নিয়ে কাজ করতে হবে। এখানে Fig 53 দেখলেই বুঝবে যে, মোট তিনটে কেস হবে--

> **যদি** $\text{Arg}(z) < 0$ **হয়, তবে** z **থাকবে** quadrant III **বা** quadrant IV **বা** negative imaginary axis**-এর উপরে।**
>
> **প্রথম ক্ষেত্র**: $z \in$ quadrant III: **সুতরাং** $-z \in$ quadrant I.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = -\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = -\pi$.
>
> **দ্বিতীয় ক্ষেত্র**: $z \in$ negative imaginary axis: **সুতরাং** $-z \in$ positive imaginary axis.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = \frac{\pi}{2}$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = -\pi$.
>
> **তৃতীয় ক্ষেত্র**: $z \in$ quadrant IV: **সুতরাং** $-z \in$ quadrant II.
>
> **তাই** $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ **এবং** $\text{Arg}(-z) = \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$.
>
> **সুতরাং** $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(-z) = -\pi$.
>
> **অতএব প্রমাণিত।**

■

Example 18: যদি $z_1 = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i,\ z_2 = -\sqrt{3} + i$ হয়, তবে $\arg(z_1)$ ও $\arg(z_2)$-র মান নির্ণয় করো, এবং এর সাহায্যে $\arg(z_1 z_2)$-এর মান নির্ণয় করো। [4] **(HS2020)**

SOLUTION:

> **এখানে** z_1 **আছে** quadrant I**-এ। সুতরাং তার** principal argument **হল**
>
> $$\operatorname{Arg}(z_1) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

এটাকে একটু দলাইমলাই করে লিখে নিলে ভালো হবে।

> **এদিকে** $\because \tan\frac{\pi}{4} = 1$ **এবং** $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
>
> $$\therefore \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

সুতরাং $\operatorname{Arg}(z_1) = \tan^{-1}\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. সাবধান, সব সময়ে কিন্তু $\tan^{-1}$ আর $\tan$ কাটাকাটি হয়ে যায় না। তবে যদি $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ হয় তবে $tan^{-1}\tan x = x$ হয়। এখানে এটাই কাজ লাগবে--

> $\because \frac{5\pi}{12} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \therefore \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{5\pi}{12}$.
>
> **অতএব** $\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{5\pi}{12}$ **এবং**
>
> $$\arg(z_1) = \left\{\frac{5\pi}{12}+2n\pi \ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

এবার একইরকম কাণ্ড করব z_2-কে নিয়েও।

> **এখানে** z_2 **আছে** quadrant II**-এ। সুতরাং**
>
> $$\operatorname{Arg}(z_2) = \pi + \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}}.$$
>
> **এখন** $-\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
>
> $\because -\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \therefore \tan^{-1}\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$.
>
> **সুতরাং** $\operatorname{Arg}(z_2) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ **এবং**
>
> $$\arg(z_2) = \left\{\frac{5\pi}{6}+2n\pi \ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

এবার $\arg(z_1z_2)$ বার করার পালা।

> **আমরা জানি** $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2)$. **তাই**
>
> $$\arg(z_1z_2) = \left\{\frac{5\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}+2n\pi \ :\ n\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{5\pi}{4}+2n\pi \ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

এইখানে একটা জিনিস খেয়াল করো। আমাদের কাছে ছিল $\arg(z_1) = \left\{\frac{5\pi}{12}+2n\pi \ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ এবং $\arg(z_2) = \left\{\frac{5\pi}{6}+2n\pi \ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. এদেরকে যোগ করার সময়ে $\frac{5\pi}{12}$ এবং $\frac{5\pi}{6}$ দুটো যোগ করেছি, কিন্তু $2n\pi$ দুটোকে যোগ করে মোটেই $4n\pi$ করি নি। কারণ দুটো set-কে যোগ করার সময়ে এই set-এর <u>প্রতিটা</u> সদস্যের সাথে ওই set-এর <u>প্রতিটা</u> সদস্যকে যোগ করতে হয়। এখানে $\arg(z_1)$-এর সদস্যরা দেখতে "$\frac{5\pi}{12}+$ কোনো জোড়সংখ্যা $\times\pi$"-এর মত, আর $\arg(z_2)$-এর

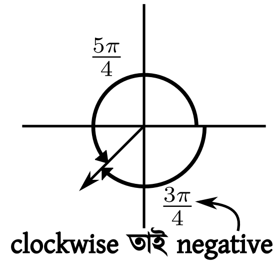


Fig 54

সদস্যরা হল "$\frac{5\pi}{6}+$ কোনো জোড়সংখ্যা $\times\pi$"-এর মত। যদি তুমি যাবতীয় জোড় সংখ্যার সঙ্গে যাবতীয় জোড় সংখ্যা যোগ করো, তবে যাবতীয় জোড়সংখ্যাই এভাবে ফিরে পাবে।
আগেই বলেছি যে, পরীক্ষকরা মাঝে মাঝে principal argument বোঝাতে Arg না লিখে arg লিখে ফেলেন। তাই $\text{Arg}(z_1z_2)$-ও বার করে দেওয়া ভালো।

> **এই** set**-এর যে একমাত্র সদস্য** $(-\pi,\pi]$**-এর মধ্যে, থাকবে সেটাই হবে** $\text{Arg}(z_1z_2)$. **তাই** $\text{Arg}(z_1z_2)=\frac{5\pi}{4}-2\pi=-\frac{3\pi}{4}$.

এই শেষ ধাপটা বোঝার জন্য Fig 54 দেখে নিলে সুবিধা হতে পারে। ■

DAY 12
ℂ-এর subset-দের নাড়াচাড়া করা

আমরা ℂ-কে একটা দিগন্তবিস্তৃত মাঠ বলে ভাবতে শিখেছি। এর বিভিন্ন অঞ্চলকে আমরা অংকের ভাষায় প্রকাশ করতে পারি। সেইরকম কিছু অংক এবার আমরা শিখব। এরকম একটা উদাহরণ আমরা ইতিমধ্যেই দেখেছি--

$|z-a|=r$ একটা circle বোঝায়, যেখানে $a\in\mathbb{C}$ এবং $r>0$.

আরেকটাও দেখেছি--

$|z-a|\le r$, যেটা বোঝায় একটা চাকতি।

প্রথমে এইগুলো দিয়েই কয়েকটা অংক দেখি।

Exercise 31: Let z and w be complex numbers lying on the circles of radii 2 and 3, respectively, with centre $(0,0)$. If the angle between the corresponding vectors is 60 degrees, then the value of $|z+w|/|z-w|$ is:

(A) $\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}$

(B) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{19}}$

(C) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$

(D) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

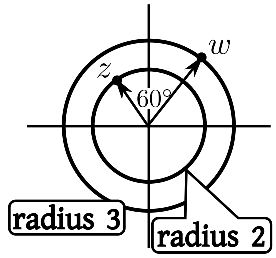


Fig 55

(ISI2020)

HINT:

এখানে বর্ণনাটা দিয়ে জ্যামিতিকভাবে, সেটাকে প্রথমে অংকের ভাষায় প্রকাশ করতে হবে। যেহেতু z রয়েছে এমন একটা circle-এর উপরে যার centre হল origin-এ এবং radius হল 2, তাই $|z| = 2$. একইভাবে $|w| = 3$. লক্ষ করো origin-কে এখানে 0 কিংবা $0+0i$ না লিখে $(0,0)$ লিখেছে। আসলে $\mathbb{C}$-টা যেহেতু গ্রাফ কাগজের মতই, তাই অনেক সময়ে লোকে $x+iy$-কে (x,y) লিখে থাকে (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$)।

যাই হোক, এ থেকে চট্ করে বার করে ফেলা যাচ্ছে যে, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{2}{3}$.

এর পর একটা কথা বলেছে "corresponding vector"। আমরা যেটাকে এতক্ষণ তীরচিহ্ন বলে আসছি, সেটাকেই বোঝাতে চাইছে এর মাধ্যমে। বলেছে যে, ওদের তীরচিহ্ন দুটোর মধ্যে কোণ হল $60°$. আবার আমরা জানি যে, $\frac{z}{w}$-এর argument মানে হল w-এর তীরচিহ্ন থেকে z-এর তীরচিহ্ন পর্যন্ত কোণটা (Fig 55)। তবে এখানে একটা সমস্যা আছে, argument মাপার সময়ে কোণটার একটা চিহ্ন থাকে (ঘড়ির কাঁটার দিকে হলে negative, উল্টোদিকে হলে positive), কিন্তু এখানে $60°$ কোণটা দিয়েছে জ্যামিতিক অর্থে, তার কোনো চিহ্ন নেই। তাই $\frac{z}{w}$-এর একটা argument হবে $60°$ বা $-60°$.

তাহলে আমরা $\frac{z}{w}$-এর modulus এবং argument দুইই পেয়ে গেলাম, অতএব $\frac{z}{w}$ বার করে ফেলতে পারব--

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}(\cos 60° + i\sin 60°) \text{ বা } \frac{z}{w} = \frac{2}{3}(\cos 60° - i\sin 60°). \text{ বা, এক কথায়, অর্থাৎ } \frac{z}{w} = \frac{1}{3}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

এবার $\frac{z}{w}$ থেকে $\frac{z-w}{z+w}$-তে পৌঁছতে আর কতক্ষণ? কারণ

$$\frac{z-w}{z+w} = \frac{\frac{z}{w}-1}{\frac{z}{w}+1}.$$

বিকল্প পদ্ধতি

এই অংকটার একটার বৈশিষ্ট্য আছে, যেটা ব্যবহার করে অংকটাকে অনেক সহজেই ঘায়েল করা যায়। এখানে শর্ত দিয়েছে z আর w-এর উপরে কিন্তু z আর w বার করতে বলেনি মোটেই। বলেছে $|z+w|/|z-w|$ বার করতে। তার মানে ওই শর্ত মেনে যাই z, w নিই না কেন, নিশ্চয়ই $|z+w|/|z-w|$ একই[10] আসবে। সুতরাং আমরা যদি ওই শর্ত মেনে কোনো

[10]এখানে অবশ্যই আমরা ধরে নিচ্ছি যে প্রশ্নটা ঠিক আছে। যদি একটা option থাকত None of the above, তাহলেও আমাদের জারিজুরি খাটত না।

Fig 56

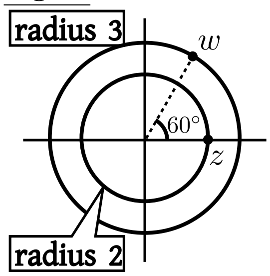
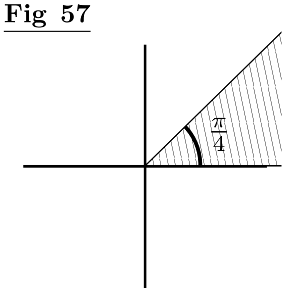


Fig 57



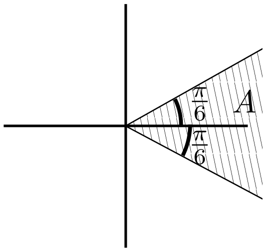


Fig 58

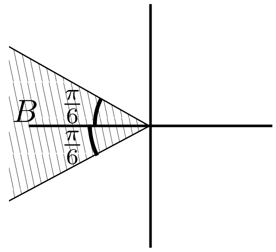


Fig 59

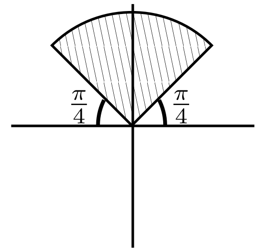


Fig 60

সুবিধাজনক বিশেষ z আর w ধরে নিই, তবে তার জন্য $|z+w|/|z-w|$ বার করলেই হবে। এরকম সুবিধাজনক z আর w-এর একটা হদিশ রয়েছে Fig 56-এ। এভাবে নিলে $z=2$ আর $w=3(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.
■

খালি modulus-র উপর শর্ত বসিয়ে গোলাকার জিনিসপত্র পাওয়া যায় (circle, চাকতি এইসব)। যদি argument-এর উপরে শর্ত চাপাই, তবে আরেক ধরণের ছবি তৈরী হবে। যেমন ধরো নীচের অংকে।

Example 19: সেই সব $z\in\mathbb{C}$-এর set-এর ছবি আঁকো, যাদের জন্য $0\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \frac{\pi}{4}$ মানে

$$\left\{z\in\mathbb{C} \ : \ 0\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \tfrac{\pi}{4}\right\}.$$

SOLUTION: ছবিটা দেখতে হবে Fig 57-এর মত। ■

Exercise 32: Fig 58 আর Fig 59-এর অঞ্চলগুলোকে Arg দিয়ে প্রকাশ করো। ■

নীচের অংকে modulus আর argument, দুইয়ের উপরেই শর্ত চাপানো হয়েছে।

Example 20: $\left\{z\in\mathbb{C} \ : \ |z|\leq 1, \quad \frac{\pi}{4}\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \frac{3\pi}{4}\right\}$-কে এঁকে দেখাও।

SOLUTION:ছবিতে Fig 60-এর মত দেখাবে। ■

Exercise 33: নীচের প্রতিটা set-কে ছবি এঁকে দেখাও।

1. $\{z\in\mathbb{C} \ : \ |z|\leq 2, \quad 0\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \pi\}$,
2. $\left\{z\in\mathbb{C} \ : \ |z|>1, \quad \mathrm{Arg}(z)\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\right\}$,
3. $\{z\in\mathbb{C} \ : \ 1\leq |z|\leq 2\}$,
4. $\left\{z\in\mathbb{C} \ : \ |z-1+i|\geq 2, \quad 0\leq \mathrm{Arg}(z)\leq \frac{\pi}{4}\right\}$.

■

Exercise 34: Fig 61-এর ছবিতে কয়েকটা লেবেল করা অঞ্চল রয়েছে। ওদেরকে ℂ-এর subset হিসেবে অংকের ভাষায় প্রকাশ করো।

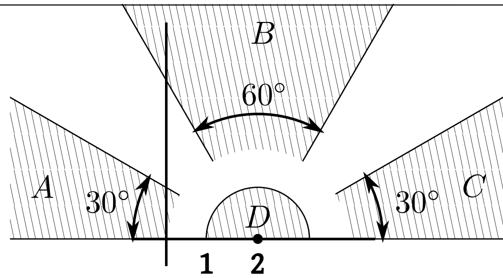


Fig 61

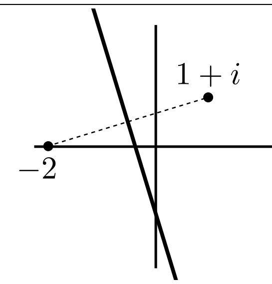


Fig 62

■

এবার আরেক রকমের উদাহরণ দেখাই। এদের সঙ্গে আমাদের আগেও মোলাকাত হয়েছে।

Example 21: $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1-i| = |z+2|\}$ ছবিতে দেখতে কেমন?

SOLUTION:এরা হল সেই সব z-এর set, যারা $1+i$ আর -2 থেকে সমান দূরত্বে আছে। অর্থাৎ যদি $1+i$ আর -2-কে একটা লাইন টেনে যোগ করা হয়, তবে সেই লাইনের perpendicular bisector (লম্ব সমদ্বিখণ্ডক)-এর উপরে আছে। ছবিতে Fig 62-এর মত। ■

Exercise 35: আগের অংকে $|z-1-i|$ আর $|z+2|$ সমান ছিল, তাই একটা সরলরেখা পেয়েছিলে। কিন্তু যদি $|z-1-i| = a|z+2|$ জাতীয় কিছু দিত, যেখানে $a \neq 1$ হল একটা positive, real number, অমনি ছবিটা ধাঁ করে বদলে গিয়ে একটা circle হয়ে যেত। কী করে?

HINT:

এটা পুরো ছবি দিয়ে বোঝা মুশকিল। প্রথমে দুই পাশকে square করে পাবে-- $|z-1-i|^2 = a^2|z+2|^2$. এবার যদি $z = x+iy$ লিখে নাও, $x, y \in \mathbb{R}$, তবে পাবে

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = a^2((x+2)^2 + y^2),$$

যেটাকে একটু দলাই মলাই করলেই হবে

$$(1-a^2)(x^2+y^2) - (2+4a^2)x - 2y + 2 - 4a^2 = 0.$$

এটাকে $(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$ আকারে লিখে ফেলা শক্ত নয় (চেষ্টা করেই দ্যাখো!)। তাহলেই এমন একটা circle পেয়ে যাচ্ছ, যার centre হল (c_1, c_2)-তে, এবং radius হল r.

■

12.1 Function-এর প্রভাবে অঞ্চলের পরিবর্তন

এবার আমরা দেখব যদি $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ কোনো একটা function দেওয়া থাকে, তবে তার ফলে একটা অঞ্চল কীভাবে বদলাবে। এখানে $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$-কে ভাবতে পারো এমন একটা ফর্মুলা, যেটা একটা complex number-কে আরেকটা complex number-এ পরিণত করে। যেমন $f(z) = iz$ বা $f(z) = z+2+3i$ বা $f(z) = z^2$. এইরকম।

Example 22: যদি $f(z) = z+2+3i$ হয়, আর $S \subseteq \mathbb{C}$ হয় Fig 63-এর মত, তবে $f(S)$ দেখতে কীরকম হবে?

SOLUTION: এখানে $f(S)$ মানে হল S-এর প্রতিটা বিন্দুর উপরে f লাগালে যা পাবে, তাদের set,
মানে $f(S) = \{f(z) \ : \ z \in S\}$.

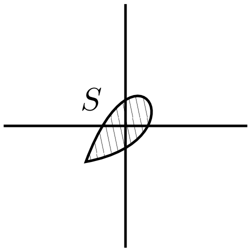


Fig 63

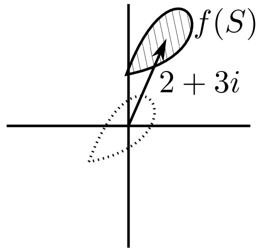


Fig 64

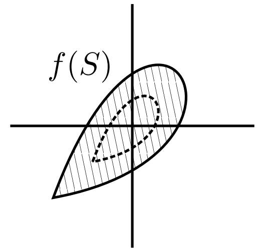


Fig 65

এখানে কোনো z-এর উপরে f লাগানো মানে, তার সাথে $2+3i$ যোগ করা, অর্থাৎ z-কে যদি 2 ঘর ডানদিকে এবং 3 ঘর উপরে তোলো, তবেই $f(z)$ পাবে। এই কাজ যদি S-এর প্রতিটা বিন্দুর উপরেই করো, তার মানে পুরো S-টাকেই তুমি 2 ঘর ডানদিকে আর 3 ঘর উপরে তুলছ (Fig 64)। ■

Example 23: আবার Fig 63-এর S-কে নিয়ে কাজ করব। কিন্তু এবার $f(z)$ নেব $f(z) = 2z$. তবে $f(S)$ কীরকম দেখতে হবে?

SOLUTION: Origin-কে কেন্দ্র করে S-টা সব দিকে দ্বিগুণ ফুলে উঠবে (Fig 65)। ■

এই অংক দুটো বুঝেছ কি? তার পরীক্ষা হবে নীচের অংকটা করতে পারলে।

Exercise 36: ধরো $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1-i| \leq 1\}$. এর ছবি আঁকলে একটা চাকতির মত হবে। তোমার কাজ হল এমন একটা $f(z)$ বার করা, যাতে $f(S)$-টাও ফের একটা চাকতিই হয়, centre একই থাকে, কিন্তু radius আগের চেয়ে দ্বিগুণ হয়ে যায়।

HINT: সাবধান, $f(z) = 2z$ নিলে কাজ হবে না কিন্তু, কারণ তাতে centre-টা নড়ে যাবে। ■

Example 24: এবার ধরো S দিলাম Fig 66-এর মত। যদি $w = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ হয়, তবে $f(S)$ কী হবে, যেখানে $f(z) = wz$?

SOLUTION: এখানে $|w| = 1$ আর $\frac{\pi}{6}$ (মানে 30°) হল w-এর একটা argument. তাই কোনো z-কে w দিয়ে গুণ করা মানে হল z-কে ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে 30° ঘুরিয়ে দেওয়া। সুতরাং উত্তর হবে Fig 67-এর মত। ■

তোমরা যারা তাস খেলো, তারা হয়তো একগুচ্ছ তাসকে আঙুলের আলতো চাপে গোল করে পাখার মত ছড়িয়ে দিতে পারো। সেই রকম একটা কাজ করা যায় $f(z) = z^2$ দিয়ে। এর ফলে z-এর argument-টা দ্বিগূণ হয়ে যায়, সেই কারণেই ছড়িয়ে

Fig 66

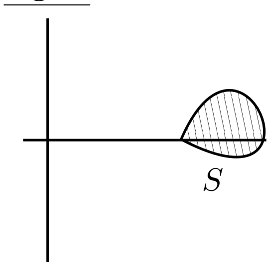
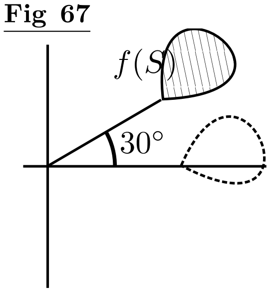


Fig 67



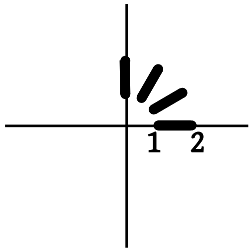


Fig 68

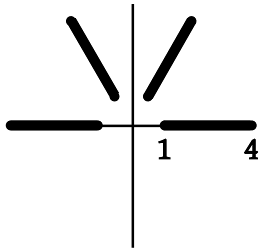


Fig 69

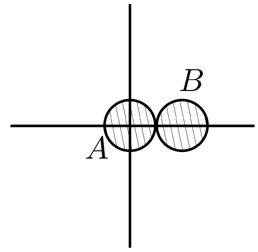


Fig 70

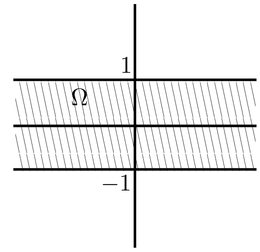


Fig 71

যাওয়ার ব্যাপারটা হয়। অবশ্য modulus-ও square হয়ে যায়, ফলে তাসগুলোর সাইজও বদলে যাবে। নীচের উদাহরণটা দেখলে সুবিধা হবে।

Example 25: Fig 68-এর set-টার উপর $f(z) = z^2$ লাগালে কীরকম হবে?

SOLUTION: Fig 69-এর মত হবে। ■

এবার তোমার জন্য একটা ছোট্টো গুগ্‌লি--

Exercise 37: Fig 70-এ দুটো চাকতি রয়েছে। প্রত্যেকটারই radius হল 1. মোটামুটি চোখের আন্দাজে এঁকে দেখাও $f(z) = z^2$ লাগালে ওদের কী দশা হবে। ■

এবারের অংকটা অবশ্য অনেকটাই সহজতর।

Exercise 38: ধরো $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$. যদি $f(z) = z^2 + 2$ হয়, তবে $f(S)$ এঁকে দেখাও।
HINT: দুই ধাপে ভেঙে ভাবলে সুবিধা হবে, প্রথমে z^2 লাগাও তারপর 2 যোগ করো। ■

নীচের অংকটাও দেখতে খুবই একইরকম, কিন্তু অনেকটাই বেশী কঠিন। এই অংকটা না বুঝলেও complex algebra শেখা কিছু আটকাবে না। তাই প্রথমে হালকাভাবে চোখ বুলিয়ে দ্যাখো, ভালো না লাগলে বাদ দিয়ে পরের অধ্যায়ে চলে যাও।

Example 26: Let $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ |y| \leq 1\}$. If $f(z) = z^2 + 2$, then draw a sketch of

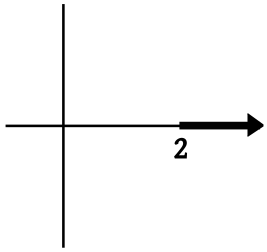
$$f(\Omega) = \{f(z) \ : \ z \in \Omega\}.$$

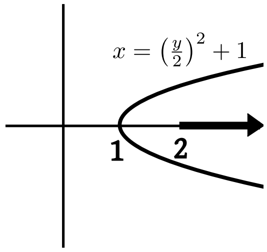
Justify your answer.
(ISI2019)

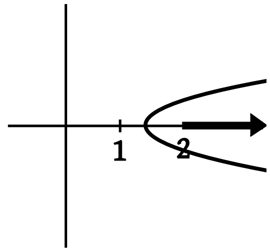
SOLUTION: Fig 71 দ্যাখো, Ω-টা কীরকম দেখতে দেখিয়েছি। যেহেতু $|y| \leq 1$ তাই উপরে $+1$ আর নীচের -1 অবধি গেছে। কিন্তু x-এর উপরে কোনো শর্ত না থাকায় x যেকোনো real number হতে পারে, সেই কারণে Ω-টা বাঁদিক আর ডানদিকে চলেছে তো চলেইছে।

এই অঞ্চলের প্রতিটা বিন্দুর উপরে আমরা f লাগিয়ে দেখব, সেটা কোথায় যায়। প্রথমে একটা সহজ কিছু নিই, ধরো $(1, 0)$ বিন্দুটা, মানে complex number হিসেবে ভাবলে $1 + 0i$. $f(1 + 0i) = 1^2 + 2 = 3$. বুঝতেই পারছ, এইভাবে $x + 0i$ আকারের যাই নিই না কেন, তার উপর f লাগালে পাবে $x^2 + 2$. সুতরাং f-এর প্রভাবে real axis-টা পরিণত হচ্ছে Fig 72-এ দেখানো মোটা লাইনটাতে। এবার ধরো নিলাম Ω-র উপরের সীমানার একটা বিন্দু। এদের চেহারা $t + i$-এর মত, যেখানে $t \in \mathbb{R}$. এর উপরে f লাগালে হবে $f(t + i) = (t + i)^2 + 2 = t^2 + 1 + 2it$. তার মানে গ্রাফ কাগজের উপরে $(t^2 + 1, 2t)$ বিন্দুটা। লক্ষ করো, $x = t^2 + 1$ আর $y = 2t$ লিখলে আমরা বলতে পারি $x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1$, যেটা হল Fig 73-এর parabola-টা (প্যারাবোলা[11])। যদি এবার Ω-র নীচের সীমানার কোনো বিন্দু নাও (যাদের দেখতে $t - i$ জাতীয়), তাহলেও দেখবে একই parabola পাবে। এবার আন্দাজ করার চেষ্টা করি পুরো $f(\Omega)$-টা কীরকম দেখতে হবে--

[11]Parabola নামটা যদি অপরিচিত হয়, তবে জেনে রাখো যে এরকম বাঁকানো জিভ-ছোলার মত curve-দেরকে ওই নামে ডাকা হয়। বাকি খুঁটিনাটি না জানলেও এখানে চলবে।







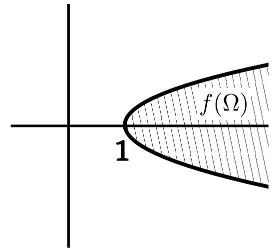


Fig 72 **Fig 73** **Fig 74** **Fig 75**

এর জন্য আমরা Ω-র যেকোনো বিন্দু নিয়ে কাজ করব। Ω-র মধ্যে যেকোনো বিন্দুই দেখতে $t + ri$-এর মত, যেখানে $-1 \leq r \leq 1$. এর উপরে f লাগালে হবে $f(t + ri) = (t + ri)^2 + 2 = t^2 + 2 - r^2 + 2irt$. একে (x, y) বিন্দু ভাবলে $x = t^2 + 2 - r^2$ এবং $y = 2rt$. এখানে x আর y-এর মধ্যে সরাসরি কোনো সম্পর্ক পাওয়া কঠিন মনে হতে পারে, কারণ r এবং t দুজনকে তাড়ানো মুশকিল। তাই আমরা r-কে রেখে খালি t-কে তাড়াব। তাহলে $x = \left(\frac{y}{2r}\right)^2 + 2 - r^2$. যেকোনো $r \in [-1, 1]$-এর জন্যই এটা একটা parabola. যদি $r = 1$ নাও, তবে যে সেটা Fig 73-এর parabola-টা হবে সে তো দেখলামই। আর $r = 0$ নিলে হবে Fig 72-র মত। এটা ঠিক parabola নয়, কিন্তু যেন একটা parabola-ই চিম্‌সে একটা লাইন হয়ে গেছে! যদি r-এর মাঝামাঝি কোনো value নাও, যেমন ধরো $r = \frac{1}{2}$, তবে মাঝামাঝি একটা parabola পাবে Fig 74-এর মত। সুতরাং $f(\Omega)$ হবে Fig 75-এর "ভিতরের অঞ্চলটা"।

এই হল আন্দাজ করা। এবার এটা গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করতে হবে।

We shall show that $f(\Omega) = \left\{x + iy \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq x - 1\right\} = S$, say.

চট্‌ করে বুঝে নাও যে, এটাই ওই parabola-টার "ভিতরের অঞ্চলটা"। এই S-টাই যে $f(\Omega)$ হবে, সেটা দেখানোর দুটো অংশ--

- এক, $f(\Omega) \subseteq S$ দেখানো, মানে যেকোনো $z \in \Omega$ নিলেই $f(z) \in S$ হবে দেখানো,
- আর দুই, $S \subseteq f(\Omega)$ দেখানো, মানে এটা দেখানো যে, S-এর যেকোনো বিন্দুকেই কোনো না কোনো $z \in \Omega$-র জন্য $f(z)$ আকারে লিখতে পারা যাবে।

Step 1: Shall show $f(\Omega) \subseteq S$:

We take any $t + ri \in \Omega$, where $t, r \in \mathbb{R}$. Then $f(t + ri) = (t + ri)^2 + 2 = t^2 + 2 - r^2 + 2irt$.

এইটুকু আমরা রাফেই করেছিলাম। এবার দেখাতে হবে এটা S-এর মধ্যে আছে, মানে এটাকে (x, y) বলে ভাবলে $\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq x - 1$ হয়।

Let $x = t^2 + 2 - r^2$ and $y = 2rt$. Then $\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq x - 1$.

⟦ Because:

To show $r^2t^2 \leq t^2 + 1 - r^2$. Now $0 \leq r^2 \leq 1$.
So $r^2t^2 \leq t^2$ and $0 \leq 1 - r^2$.
Adding, $r^2t^2 \leq t^2 + 1 - r^2$, as required,

]]

এখানে একটা জিনিস বিশেষভাবে লক্ষ করার। আমরা আগেভাগেই রাফ করে উত্তরটা জেনে গিয়েছিলাম, সেই কারণেই জোর দিয়ে এই ধাপগুলো করতে পারলাম। রাফটুকু না করা থাকলে এই ধাপ কয়টা থেকে S-র চেহারাটা আন্দাজ করাটা প্রায় অসম্ভব।
এবার উল্টো দিকটা।

Step 2: Shall show $S \subseteq f(\Omega)$:

We take any $x+iy \in S$. Then $\left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq x-1$.

আমাদের কাজ হল এমন $t+ir \in \Omega$ খুঁজে বার করা যাতে $f(t+ir) = x+iy$ হয়। এক্ষুণি আমরা দেখে নিয়েছি যে, এর মানে $x = t^2+2-r^2$ এবং $y = 2rt$. আমাদের এটা দেখেই আমাদের হাত নিশ্‌পিশ্‌ করে উঠছে $t = \frac{y}{2r}$ বসাতে, তাহলে পেয়ে যাব $x = \left(\frac{y}{2r}\right)^2 + 2 - r^2$, যেখান থেকে r বার করে ফেলা যাবে বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু সমস্যা হল, r দিয়ে ভাগ করার আগে দেখা উচিত $r \neq 0$ হচ্ছে কিনা। কিন্তু r তো এখনও বেরোয় নি, সুতরাং সেটা শূন্য নাকি নয়, সেটা এখনই জানব কী করে? আমরা বরং তার চেয়ে y-এর উপর শর্তটা চাপাই, কারণ y দেওয়া আছে। যদি $y \neq 0$ হয় তবে $r \neq 0$ হতেও বাধ্য, যেহেতু $y = 2rt$. সুতরাং দুটো কেস বানানো যাক, $y \neq 0$ আর $y = 0$.

Case 1: $y \neq 0$: Here $r \neq 0$. $\therefore x = \left(\frac{y}{2r}\right)^2 + 2 - r^2$.

Putting $s = r^2$, we have $x = \frac{1}{s}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2 - s$.

So we get the quadratic equation

$$s^2 + (x-2)s - \frac{y^2}{4} = 0.$$

This gives

$$s = \frac{-(x-2) \pm \sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{2}.$$

Out of these one root is > 0, and we can take $r = \sqrt{s} > 0$.

যেহেতু $y \neq 0$, সেই জন্যই $s > 0$ হল, আর সেই কারণেই আমরা $\sqrt{s} > 0$ বলতে পারলাম। ব্যস্‌, একটা r পাওয়া গেল, এবার খালি একটা t পেলেই হয়। সেটা খুবই সহজ, কারণ--

$\because y = 2rt,\ \therefore t = \frac{y}{2r}$.

এতক্ষণ আমরা $y \neq 0$ কেসটা করছিলাম, এবার $y = 0$ কেসটা। এখানে আমরা কাজ করব Fig 76-এর মোটা লাইনটা নিয়ে, যেটা 1 থেকে ∞ পর্যন্ত গেছে। মনে রেখো আমরা S-কে অনেকগুলো parabola-র স্তর একটার ভিতর একটা বসিয়ে বানিয়েছি। আমাদের মোটা লাইনটার যে অংশটা 2-এর ডানদিকে, সেটা আসলে সবচেয়ে ভিতরের parabola-টা, খালি চিম্‌সে একটা লাইন হয়ে গেছে, এই যা। সেই parabola-টা পাব $r = 0$ বসালেই (এটা আমরা রাফ করার সময়ে প্রথমেই লক্ষ করেছিলাম)। কিন্তু মোটা লাইনটা যে অংশটা 1 থেকে 2 পর্যন্ত বিস্তৃত, সেটা কোনো parabola চিম্‌সে তৈরী হয় নি সেটার জন্ম হয়েছে parabola-গুলোর শীর্ষবিন্দুগুলো নিয়ে। এই বিন্দুগুলোকে পাওয়া যাবে বিভিন্ন r-এর জন্য $t = 0$ বসালে। সেই হিসেবে আমরা আরো দুটো কেস বানাবো।

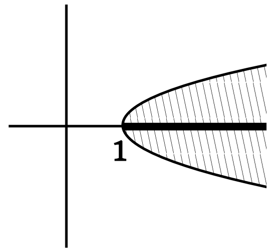


Fig 76

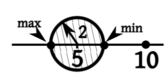
> Case 2A: $y = 0, x \geq 2$: Here we take $r = 0$ and $t = \sqrt{x-2}$.

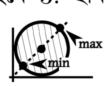
এটা পেয়েছি $x = t^2 + 2 - r^2$ এবং $y = 2rt$-এর মধ্যে $y = 0$ এবং $r = 0$ বসিয়ে। লক্ষ করো, $x \geq 2$ হওয়ায় $\sqrt{r-2}$ একটা real number হচ্ছে।
একইভাবে, যদি $1 \leq x < 2$ হয়, তবে $t = 0$ বসালে r পাব--

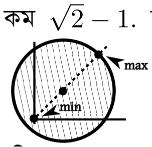
> Case 2B: $y = 0, 1 \leq x < 2$: Here we take $t = 0$ and $r = \sqrt{2-x}$.

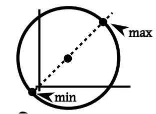
ব্যস্, আমাদের ম্যারাথন অংকের এখানেই ইতি। তবে ভালো করে পুরোটা পড়ে দেখলে বুঝবে যে, সমাধানটা লেখার পক্ষে খুব একটা লম্বা নয়, আসল কষ্টটা হচ্ছে ধাপগুলো পরিকল্পনা করা, এবং ছবি ব্যবহার না করলে সেটা প্রায় অসম্ভব!
■

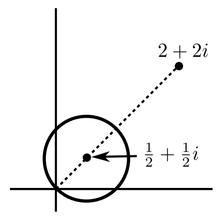
Answers

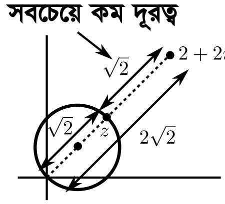
1. $\text{Im}(z) = 0$. **2.** (B), কারণ $|(3i-1)^2| = |3i-1|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$. **3.** $\frac{(a^2+1)^4}{4a^2+1}$. **4.** এখানে $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ মানে হল $|z-i| < |z+i|$, বা $|z-i| < |z-(-i)|$, অর্থাৎ কিনা z-টা $-i$-এর থেকে i-এর বেশী কাছে। যদি i আর $-i$-এর ঠিক মাঝখান দিয়ে একটা লাইন টানো (মানে i আর $-i$-এর সংযোজক সরলরেখার perpendicular bisector (লম্ব সমদ্বিখণ্ডক) তবে z-টা লাইনটার সেই পাশে থাকবে, যে পাশে i আছে। এই সীমানাটা আর কিছুই নয়, real axis-টা। সুতরাং উত্তর হবে (C). **5.** এই যুক্তিটা থেকে খালি এটুকুই বলা যায় যে, উত্তরটা ≤ 2 হবে। সুতরাং (D) হবে না। কিন্তু (A) আর (B) যে হতে পারে না, সেটা বলা যাচ্ছে না। **6.** (i) Circle, centre $-i$ আর radius 1. (ii) Circle, centre $-i/2$ আর radius $5/2$. (iii) $-i/2$ এবং i-এর মধ্যবর্তী perpendicular bisector, মানে $y = \frac{1}{4}$ সরলরেখাটা। (iv) $y = -3$ সরলরেখাটা। **7.** একই লাইনে $\geq$ আর $\leq$ রয়েছে, দুই হুলো বেড়ালের মত মুখোমুখি! কে জিতবে কিচ্ছু বলা যাচ্ছে না! **8.** সবচেয়ে বেশী দূরে থাকবে, যখন $z = 3$, দূরত্বটা হবে তখন 7. আর সবচেয়ে কাছে থাকবে যখন $z = 7$, তখন দূরত্বটা হবে 3. ছবিটা এরকম-- 

9. সবচেয়ে বেশী $\sqrt{2}+1$, সবচেয়ে কম $\sqrt{2}-1$. ছবিটা এরকম-- 

10. প্রথম ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশী $\sqrt{2}+2$, সবচেয়ে কম 0. ছবিটা এরকম-- 

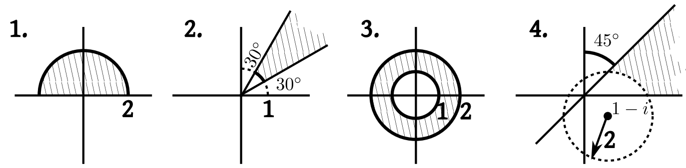
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশী $\sqrt{2}+2$, কিন্তু সবচেয়ে কম $2-\sqrt{2}$. ছবিটা এরকম-- 

প্রমাণ করতে triangle inequality-র তৃতীয় রূপটা লাগবে। **11.** (A). **13.** Imaginary অংশ থেকে পাচ্ছি $y=1$, এবং real অংশ থেকে $\sqrt{x^2+y^2}+x=3$. যেহেতু $y=1$ পেয়ে গেছি, তাই $3-x=\sqrt{x^2+1}$. সুতরাং উত্তর (D). **14.** $z=\frac{3}{4}+i$. **15.** (D) তো হবেই, কারণ $z=2\mathrm{Re}(p)$ হচ্ছে। আর যেহেতু $|p|=1$ ছাড়া p-এর সম্বন্ধে আর কোনো তথ্যই আমাদের হাতে নেই, তাই বাকিগুলোর কোনোটাই জোর দিয়ে বলা যাবে না। **16.** (C). যাই z_2 নাও না কেন, $|z_1|=2$ পাবে। **17.** (D). **18.** (C). **19.** (B). যদি $x(x-1)+y(y-1)=0$ শর্তটাকে সাজিয়ে লেখো, তবে পাবে $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. এটা একটা circle-এর equation, যার centre হল $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$-এর আর radius হল $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ছবিতে এরকম-- 

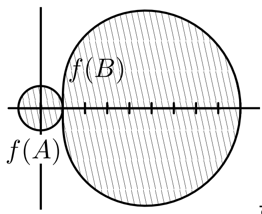
আমাদের কাজ করতে বলেছে $|z-(2+2i)|$ নিয়ে, মানে $2+2i$ থেকে z-এর দূরত্ব নিয়ে। এই দূরত্বটা কখন minimum হবে সেটা এই ছবিতে দেখে নাও-- 

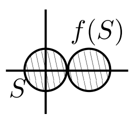
20. (i) $\arg(i)=\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, (ii) $\arg(i)=\{0+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$, (iii) $\arg(i)=\{\pi+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$, (iv) $\arg(i)=\left\{-\frac{\pi}{2}+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, (v) $\arg(i)=\left\{\frac{\pi}{4}+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. **21.** $\arg(z)=\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ এবং $\arg(z^2)=\arg(-1)=\{\pi+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. অবশ্যই $3\pi\in\arg(z^2)$. কিন্তু $2\arg(z)=\{\pi+4n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\}$. তাই $3\pi\not\in 2\arg(z)$. **22.** $\mathrm{Arg}(z_1),\mathrm{Arg}(z_2),\mathrm{Arg}(z_3)>0$ এবং $\mathrm{Arg}(z_4),\mathrm{Arg}(z_5),\mathrm{Arg}(z_6)<0$. **23.** $|\mathrm{Arg}(z_1)|,|\mathrm{Arg}(z_5)|,|\mathrm{Arg}(z_6)|\le\frac{\pi}{2}$ আর $\frac{\pi}{2}<|\mathrm{Arg}(z_2)|,|\mathrm{Arg}(z_3)|,|\mathrm{Arg}(z_4)|\le\pi$. **24.**

(i) IV (ii) III (iii) Negative imaginary axis (iv) Negative real axis (v) III (vi) Positive imaginary axis. **25.** $\mathrm{Arg}(z)=\theta-2\pi$. **26.** Quadrant III-তে আছে। $\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$. **27.** Quadrant III-তে আছে। $-\frac{3\pi}{4}$ হল principal argument. তাই argument হল $\left\{-\frac{3\pi}{4}+2n\pi\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.
28. $\left|1+i\tan\frac{4\pi}{7}\right|=\sqrt{1^2+\tan^2\frac{4\pi}{7}}=\sqrt{\sec^2\frac{4\pi}{7}}=-\sec\frac{4\pi}{7}$. দেখো, ফস্ করে যেন $\sec\frac{4\pi}{7}$ লিখে দিও না। কারণ $\sec\frac{4\pi}{7}<0$, যেহেতু $\cos\frac{4\pi}{7}<0$. আমরা quadrant IV-এ কাজ করছি। সুতরাং argument হবে $\tan^{-1}\tan\frac{4\pi}{7}$. সাবধান, $\tan^{-1}$ আর $\tan$ কিন্তু সবসময়ে কাটাকাটি হয়ে যায় না। এখানে $\tan^{-1}\tan\frac{4\pi}{7}=\frac{4\pi}{7}-\pi=-\frac{3\pi}{7}$. **29.** (i) $-\frac{2\pi}{3}$. (ii) $\sin\frac{4\pi}{3}+i\cos\frac{4\pi}{3}$-কে $i\left(\ \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\ \right)$ বলে ভাবো। উত্তর হবে $-\frac{\pi}{6}$. (iii) এখানে $\tan\frac{4\pi}{3}+i=\frac{i}{\cos 4\pi/3}\times\left(\ \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4p}{3}\right)\ \right)$. যেহেতু $\cos\frac{4\pi}{3}<0$, তাই $\frac{i}{\cos 4\pi/3}$ রয়েছে negative imaginary axis-এ। অতএব একটা argument হবে $-\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}=-\frac{11\pi}{6}$. সুতরাং Arg হবে $\frac{\pi}{6}$. (iv) $-\frac{\pi}{6}$.
30. (A). **31.** (A). **32.** $A=\left\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Arg}(z)\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\right\}$. $B=\left\{z\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Arg}(z)\in\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]\cup\left(-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]\right\}$. **33.**



34. $A = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| > 2 \ \& \ \mathrm{Arg}(z) \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right\}$. $B = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| > 2 \ \& \ \mathrm{Arg}(z) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right\}$. $C = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| > 2 \ \& \ \mathrm{Arg}(z) \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right\}$. $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-2| \leq 1 \ \& \ \mathrm{Arg}(z) \in [0,\pi]\}$. **35.** $c_1 = \frac{1+2a^2}{1-a^2}$, $c_2 = \frac{1}{1-a^2}$ এবং $r^2 = \frac{4a^2-2}{1-a^2} + c_1^2 + c_2^2 = \cdots = \frac{10a^2}{(1-a^2)^2} \geq 0$. **36.** একটা উত্তর হল $f(z) = 2z - i - 1$.

37. 

লক্ষ করো A-টা অপরিবর্তিত আছে। কিন্তু B-টা শুধু ফুলেছে তাই নয়, এক দিকে একটু বেশী চেপে যাওয়াতে আর নিখুঁত গোলও নেই। কারণ যেসব বিন্দু origin থেকে 1-এর চেয়ে বেশী দূরে, তাদের উপর f-এর প্রভাব বেশী। **38.** 

z^2 লাগালে S যথাস্থানেই থাকবে, 2 যোগ করলে ডানদিকে সরে যাবে।

Chapter III
Complex number-দের root

DAY 13
নানারকমের root

কচু গাছের মূলকে কচু বলে। সুতরাং বিষয়টার একেবারে মূল পর্যন্ত যাওয়া দরকার।

--হ য ব র ল

এইবার আমরা কোনো complex number-এর square root (বর্গমূল), cube root (ঘনমূল), ইত্যাদি বার করা শিখব। এই সব মূল-দের মূল সংজ্ঞা আমরা ছোটোবেলায় real number-দের বেলায় যা শিখেছিলাম, complex number-দের বেলাতেও মূলতঃ তাই-ই। একবার মনে করিয়ে দিই--

DEFINITION: Square root
ধরো $a, b \in \mathbb{C}$. তবে আমরা a-কে b-এর একটা **square root** বলব, যদি $a^2 = b$ হয়।

যদি a^2-এর বদলে a^3 নিতাম, তবে বলতাম **cube root**. এইভাবে আমরা যেকোনো n-th root-ই নিতে পারি, সংজ্ঞাটা এরকম--

DEFINITION: n-th root
ধরো $a, b \in \mathbb{C}$ আর $n \in \mathbb{N}$. তবে আমরা a-কে b-এর একটা **n-th root** বলব, যদি $a^n = b$ হয়।

কয়েকটা উদাহরণ করে গা গরম করা যাক।

Example 1: দেখাও যে, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হল i-এর একটা square root.

SOLUTION: হাতেকলমে গুণ করেই দেখা যাক--

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+i^2+2i) = i.$$

সুতরাং হ্যাঁ, সত্যিই $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হল i-এর একটা square root. ■

Exercise 1: নীচের প্রতি ক্ষেত্রে পরীক্ষা করে দ্যাখো a-টা b-এর একটা square root হচ্ছে কিনা।

1. $a = 2 + 3i,\ b = -5 + 12i$.
2. $a = 2 - 3i,\ b = 5 + 12i$.
3. $a = 2 - 3i,\ b = 5 - 12i$.
4. $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ b = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
5. $a = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

■

আমরা জানি যে, real number-দের বেলায় সব সংখ্যার সব root পাওয়া যায় না, যেমন -1-এর square root. কিন্তু complex number-দের বেলায় সেরকম কোনো সমস্যা নেই, যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই যেকোনো complex number-এর n-th root পাওয়া যাবেই। যদি complex number-টা 0 হয়, তবে সবগুলো n-th root-ই যে 0-ই হবে, সে তো বোঝাই যাচ্ছে। কিন্তু যদি কোনো nonzero complex number নাও, তবে তার ঠিক n-খানাই n-th root থাকবে! এই ব্যাপারটা ছবি দিয়ে চমৎকার বোঝা যায়। সেটা প্রথমে আলোচনা করে নিই।

13.1 ছবি দিয়ে বোঝা

এখানে আমরা একটা complex number-কে তীরচিহ্ন দিয়ে ভাবব, মানে argument আর modulus দিয়ে।

Example 2: Fig 1-এ দুটো complex number দেখানো আছে z আর w. দুটোকেই তীরচিহ্ন হিসেবে দেখানো হয়েছে, এবং modulus আর argument-ও দেওয়া আছে। তোমাকে বলতে হবে w-টা z-এর একটা square root কিনা।

SOLUTION: তার মানে পরীক্ষা করে দেখতে হবে $w^2 = z$ হচ্ছে কিনা। আমরা জানি $|w^2| = |w|^2$. সুতরাং এখানে $|w^2| = 2^2 = 4$. এবং সত্যিই $|z| = 4$-ও বটে। এবার argument-টা মেলে কিনা দেখি। আমরা জানি যে, w^2-এর argument হয় w-এর argument-এর দ্বিগুণ। এখানে w-এর একটা argument দিয়েছে $30°$. সুতরাং w^2-র একটা argument হবে এর দ্বিগুণ, মানে $60°$. সেখানেও z-এর সঙ্গে মিলছে, অতএব সত্যিই $w^2 = z$, মানে w হচ্ছে z-এর একটা square root. ■

একইরকম আরেকটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 3: এবার Fig 2-এর দিকে তাকাও। এবারও কি w-টা z-এর একটা square root হবে?

SOLUTION: এখানে $|w| = 1$. সুতরাং $|w^2| = |w|^2 = 1^2 = 1$. আবার $|z| = 1$-ও দিয়েছে। সুতরাং modulus নিয়ে কোনো সমস্যা নেই। কিন্তু argument-এর বেলায়? দেখাই যাচ্ছে যে, z এর একটা argument হল $120°$, আর w-এর একটা argument হচ্ছে $-120°$ (চিহ্নটা নিয়ে সাবধান, ঘড়ির কাঁটার দিকে বলে negative)। চট্ করে দেখে তো মোটেই $120°$-কে $-120°$-র দ্বিগুণ বলে বোধ হচ্ছে না। কিন্তু এখানে একটা ব্যাপার আছে। যদি তুমি $-120°$-র দ্বিগুণ নাও, তবে পাবে $-240°$, সেটা কিন্তু argument হিসেবে $120°$-রই নামান্তর, কারণ $120° + 240° = 360°$, মানে একটা সম্পূর্ণ পাক।

Fig 1

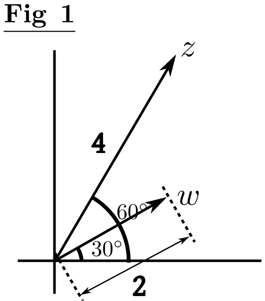
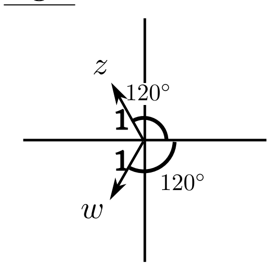


Fig 2



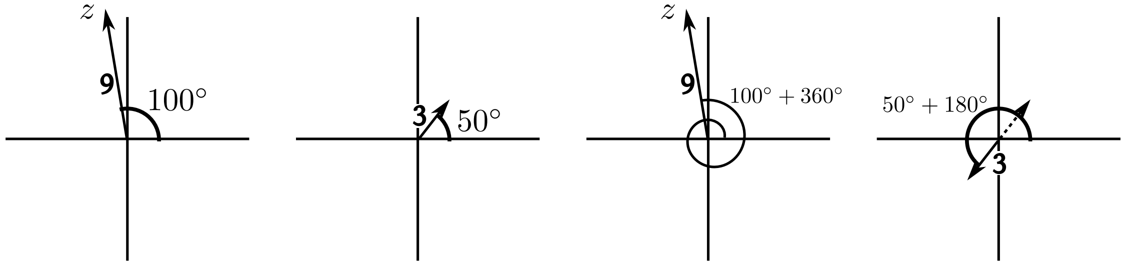


Fig 3 **Fig 4** **Fig 5** **Fig 6**

সুতরাং এখানে সত্যিই w-টা z-এর একটা square root হচ্ছে। ■

এইবার এই কায়দাটাকেই উল্টো দিক দিয়ে ব্যবহার করব।

Example 4: ধরো তোমাকে Fig 3-এর মত $z \in \mathbb{C}$ দিলাম, যেখানে $|z| = 9$ এবং একটা argument হল $100°$. তবে z-এর একটা square root দিতে পারবে?

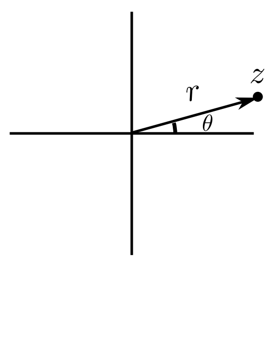
SOLUTION: প্রথমেই modulus-টার square root নিয়ে নাও, তবে পাবে $\sqrt{9} = 3$. সুতরাং z-এর square root যাই হোক না কেন, তার modulus যে 3 হতে বাধ্য এ নিয়ে কোনো সন্দেহের অবকাশ নেই। Argument বার করার জন্য z-এর argument-এর অর্ধেক নিলেই হবে। তা, z-এর একটা argument তো $100°$ বলেইছে। সুতরাং z-এর square root-এর একটা argument হিসেবে $\frac{100}{2}° = 50°$ নিলেই হবে। যেহেতু modulus আর একটা argument জানলেই একটা complex number-কে সম্পূর্ণ জানা হয়, তাই এইভাবে আমরা z-এর একটা square root পেয়ে গেলাম (Fig 4)। এটাই কিন্তু একমাত্র উত্তর নয়। যেহেতু z-এর একটা argument হল $100°$, তাই আরেকটা argument হবে $100° + 360°$. বোঝার জন্য Fig 5 দেখে নাও। এই কোণটার অর্ধেক করলে পাবে $50° + 180°$. সেখান থেকে z-এর আরেকটা square root পাবে Fig 6। লক্ষ করো, এই square root-টা হল আগেরটাকে ঠিক $180°$ ঘুরিয়ে পাওয়া। অর্থাৎ আগেরটার তীরচিহ্ন আর এইটার তীরচিহ্ন পরস্পরের ঠিক উল্টো। তাই এই দুটো square root পরস্পরের negative.

আচ্ছা, z-এর তো অসংখ্য argument আছে, তাদের প্রতিটা থেকেই কি এইভাবে একটা করে নতুন square root পাওয়া যাবে? দেখা যাক। মনে করো এই argument-টা নিলাম, $100° + 2 \times 360°$. এর অর্ধেক হল $50° + 360°$. সুতরাং এটা আবার সেই প্রথম square root-টারই রূপভেদ। একইভাবে, তুমি যাই $100° + n \times 360°$ নাও না কেন, খালি ওই দুটো square root-ই ফিরে ফিরে আসবে। ■

এই উদাহরণটা থেকে একটা জিনিস বোঝা যাচ্ছে-- যাই $z \in \mathbb{C}$ দেওয়া থাক না কেন, যদি $z \neq 0$ হয়, তবে তার ঠিক দুটোই square root থাকতে বাধ্য। যদি $z = 0$ নাও, তবে অবশ্য তার খালি একটাই square root সম্ভব, সেটা হল 0 নিজেই। একইরকম যুক্তি খাটানো যায় cube root-এর বেলাতেও, যেমন নীচের অংকটায়।

Example 5: ধরো তোমাকে Fig 7-এর মত একটা $z \in \mathbb{C}$ দিলাম। এর cube root-গুলো ছবি দিয়ে দেখাও।

Fig 7



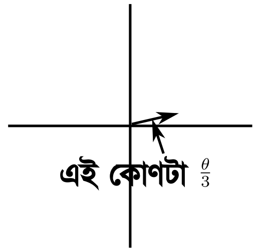


Fig 8

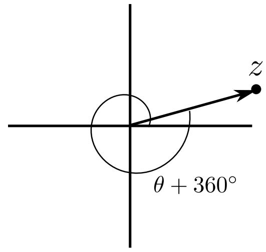


Fig 9

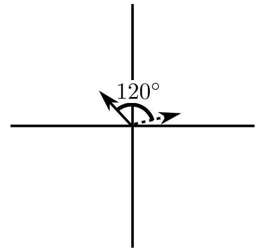


Fig 10

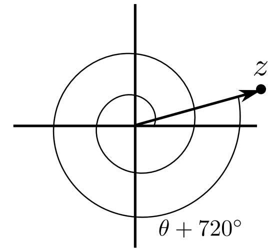


Fig 11

SOLUTION: যদি w হয় z-এর cube root, তবে $|w|^3 = |z|$, হবে। সুতরাং $|w| = \sqrt[3]{z}$ হবে। আবার $\arg(z) = 3\arg(w)$ হবে। তাই $\arg(w) = \frac{1}{3}\arg(z)$ হতে বাধ্য।
এখানে দেখা যাচ্ছে z-এর দৈর্ঘ্য (মানে modulus) হল r, যার cube root নিলে পাই $\sqrt[3]{r}$. এটাই হবে cube root-গুলোর modulus. এবার যদি Fig 7-র মত করে কোণটা নাও, তবে তাকে তিনভাগ করলে পাবে Fig 8-এর মত cube root. যদি Fig 9-র মত করে কোণটাকে নিতে, তবে ওই বাড়তি পাকটার জন্য একটা $360°$ আসত, এবং সেটাকে তিনভাগ করলে একটা বাড়তি $120°$ পাওয়া যেত। সুতরাং এবারের তীরচিহ্নটা আগের তীরচিহ্নটারই $120°$ ঘোরানো রূপ (Fig 10)। একইভাবে যদি Fig 11-এর মত দুই পাক ঘুরতে তবে, তিনভাগ করার পর আরও $120°$ ঘুরে cube root-এর তীরচিহ্নটা হত Fig 12-এর মত। বুঝতেই পারছ যে আরো এক পাক ঘোরালে cube root-এর তীরচিহ্নটা আরও $120°$ ঘুরে ফের Fig 8-এর মতই হয়ে যেত। ■

এই অংকের যুক্তিটা ভালো করে বুঝলেই দেখবে যে, যেকোনো nonzero $z \in \mathbb{C}$-এর বেলাতেই তিনটে cube root হয়, যাদের দৈর্ঘ্য সমান, এবং যারা একটা ফুলের পাপড়ির মত সমান সমান কোণে ছড়িয়ে থাকে। অবশ্য যদি 0-র cube root চাও, তবে সেক্ষেত্রে খালি একটাই উত্তর পাবে, এবং সেটা 0 নিজেই। এখানেও ফুলের উপমাটা খাটে, খালি পাপড়িগুলোর দৈর্ঘ্য 0 হওয়ায় ওদেরকে আর আলাদা করে চেনা যাচ্ছে না!
একইভাবে যদি 4th root নিতে তাহলে পেতে সমান সমান কোণে বিন্যস্ত সমান দৈর্ঘ্যের চারটে তীরচিহ্ন (Fig 13)। যেহেতু চারজন আছে, তাই ওদের মধ্যেকার কোণগুলো হবে $\frac{360°}{4} = 90°$ করে। এরকম একটা উদাহরণ তো চট করে দেখাই যায়, 1-এর চারটে 4th root হল 1, i, -1 এবং $-i$, যাদের ছবি দিয়ে দেখিয়েছি Fig 14-এ।
এবার চট্ করে নীচের অংকটা করো তো!

Exercise 2: কোনো একটা complex number-এর একটা 6th root হল Fig 15-এর মত। ওই ছবিতে বাকি 6th root-গুলো চোখের আন্দাজে আঁকতে পারবে? ■

Exercise 3: বেশী অংক না কষেই ধাঁ করে 1-এর cube root-গুলো তীরচিহ্ন দিয়ে এঁকে দাও।
HINT: মনে রেখো 1-এর একটা cube root হল 1 নিজেই। ■

Fig 12

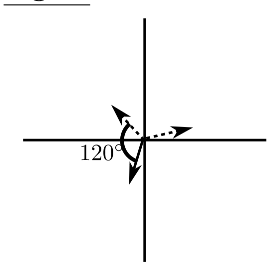


Fig 13

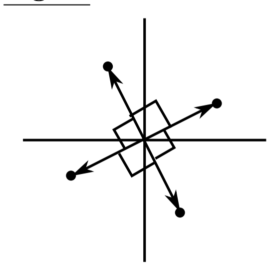


Fig 14

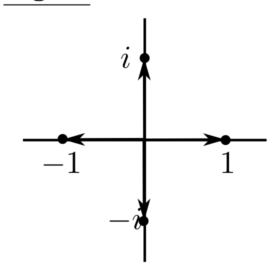
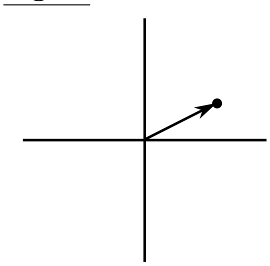


Fig 15



পুরো আলোচনাটার নির্যাস হল এই--

THEOREM
ধরো $z \neq 0$ একটা যা খুশি complex number এবং $n \in \mathbb{N}$. তবে z-এর ঠিক n-খানাই n-th root আছে। তারা সকলে origin-কে ঘিরে একটা ফুলের পাপড়ির মত সমান সমানভাবে ছড়িয়ে আছে, প্রতিটার modulus হল $\sqrt[n]{|z|}$ এবং ওদের মধ্যেকার কোণগুলো হল $\frac{360}{n}^\circ$ করে।

13.2 ছবি ছাড়া square root বার করা

এতক্ষণ আমরা ছবি দিয়ে square root, cube root ইত্যাদি বার করছিলাম, এবং তার জন্য argument নিয়ে কাজ করতে হচ্ছিল। দুঃখের ব্যাপার যে, কোনো complex number-কে $x+iy$ আকারে দেওয়া থাকলে (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$) তার argument বার করা সব সময়ে সহজ হয় না। এইবার আমরা একটা কায়দা শিখব, যেটা $x+iy$ (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$) আকারে দেওয়া complex number-দের square root বার করতে সাহায্য করবে, কোনো argument বার না করেই।

Example 6: $(7-24i)$ জটিল রাশিটির বর্গমূল নির্ণয় করো। [2] **(HS2016)**

SOLUTION:

> **ধরি** $z = x+iy$ **হল** $7-24i$**-এর একটা বর্গমূল, যেখানে** $x, y \in \mathbb{R}$.

এই ধরে নেওয়াতে কোনো সমস্যা নেই, কারণ আমরা জানি যে, যেকোনো complex number-এরই অন্ততঃ একটা square root থাকেই।

> **তাহলে** $(x+iy)^2 = 7-24i$ **হবে।**
> **সুতরাং** $(x^2-y^2)+(2xy)i = 7-24i$ **হবে। এখান থেকে** real **আর** imaginary **অংশ মিলিয়ে পাচ্ছি**
> $$x^2 - y^2 = 7 \qquad \textbf{(1)}$$
> $$2xy = -24 \qquad \textbf{(2)}$$

এই দুটো equation-এর সমাধান বার করা একেবারে সহজ নাও লাগতে পারে। আমরা অবশ্য এখনই এদের সমাধান করার চেষ্টা করব না। বরং আমরা modulus নিয়ে কাজ করব।

> $\because z^2 = 7-24i$**, তাই**
> $$|z|^2 = |z^2| = |7-24i|^2 = \cdots = 625.$$
> **সুতরাং**
> $$x^2 + y^2 = 625. \qquad \textbf{(3)}$$

লক্ষ করো, আমরা z^2-এর real অংশ, imaginary অংশ এবং modulus নিয়ে কাজ করলাম, কিন্তু argument-এ হাত দিলাম না, কারণ ওইটেই সবচেয়ে কষ্টদায়ক হয়ে থাকে, $\tan^{-1}$ ইত্যাদি এসে গিয়ে ঝামেলা বাঁধায়!
আমাদের হাতে এখন তিনটে equation আছে, যাদেরকে আমরা **(1)**, **(2)** আর **(3)** নাম দিয়েছি। এদের মধ্যে প্রথম **(1)** আর **(3)** ব্যবহার করব।

> **সুতরাং** $(\mathbf{1})$ **আর** $(\mathbf{3})$ **থেকে পাচ্ছি** $x^2 = 16$ **এবং** $y^2 = 9$.
> **অতএব** x **হবে** $+4$ **বা** -4, **এবং** y **হবে** $+3$ **বা** -3.

চিহ্নগুলো ঠিক করতে আমাদের সাহায্য করবে $2xy = -24$.

> **যেহেতু** $2xy = -24 < 0$, **তাই** x **এবং** y**-এর চিহ্ন পরস্পরের উল্টো হতে হবে। সুতরাং** $7 - 24i$**-এর দুটো বর্গমূল হল** $\pm(4 - 3i)$.

■

এই অংকের কায়দায় যেকোনো complex number-এরই square root বার করে ফেলা যায়--

- প্রথমে square root-এর $x + iy$ রূপ ধরে নিতে হয়, যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$.
- তারপরে, $(x + iy)^2$-এর real আর imaginary অংশ থেকে $x^2 - y^2$ এবং $2xy$ বার করতে হয়।
- এবার modulus ব্যবহার করে $x^2 + y^2$ বার করতে হয়।
- যেই $x^2 - y^2$ আর $x^2 + y^2$ দুটোই জানা হয়ে গেল, অমনি x^2 আর y^2 বেরিয়ে যায়।
- সবশেষে $2xy$-এর চিহ্ন দেখে ঠিক করতে হয় x আর y-এর চিহ্ন একই হবে, নাকি পরস্পরের উল্টো হবে।

নীচের অংকটা করতে পারলে বুঝবে যে, কায়দাটা তোমার মাথায় ঢুকেছে।

Exercise 4: Find the square roots of $16 - 30i$. **(CBSE2018-19)** ■

Exercise 5: $(-2i)$-এর বর্গমূলগুলি নির্ণয় কর। **(HS2012)**
HINT: ছবি এঁকে নিতে ভুলো না যেন। তাতে উত্তরটা আন্দাজ করাও যাবে, আবার অংক কষে যা পাবে সেটা মেলানোও যাবে। ■

অবশ্য একই রকম কায়দা করে cube root বা যেকোনো n-th root বার করা সহজ নয়। তখন সেই ছবি আঁকার কায়দাটা বা argument ব্যবহার করে এগোনো ছাড়া গত্যন্তর নেই।

13.3 Set-valued function

এইখানে একটা কথা বলে রাখি। আমরা আগেই দেখেছি argument হল একটা set-valued function. একইভাবে square root বা cube root বা অন্য root-গুলোও একেকটা set-valued function. যেমন আমরা আগের একটা অংকে দেখেছিলাম যে $7-24i$-এর square root হল $\pm(4-3i)$, অর্থাৎ $\sqrt{7-24i} = \{4-3i, \ -4+3i\}$. এইখানেই real number-এর সঙ্গে complex number-দের তফাৎ। সেখানেও একটা সংখ্যার একাধিক square root হয়ে থাকে, যেমন 4-এর square root হল ± 2, অর্থাৎ $\{-2, 2\}$. কিন্তু যেই $\sqrt{4}$ লিখব, তখন বোঝাব খালি 2, কারণ real number-দের বেলায় $\sqrt{\ }$ বোঝায় খালি <u>nonnegative</u> square root. কিন্তু complex number-দের বেলায় তো আর $>$ বা $<$ বলে কিছু হয় না, তাই ≥ 0 বলেও কিছু হয় না। সেই কারণে nonnegative square root বলে আলাদা করে কিছু বোঝায় না। তাই $z \in \mathbb{C}$ হলে $\sqrt{z}$ হল z-এর <u>যাবতীয়</u> square root-এর set. একইভাবে $\sqrt[3]{z}$ হল তার <u>যাবতীয়</u> cube root-এর set. দুঃখের ব্যাপার অনেক বই এবং প্রশ্নপত্রেই এই কথাটা মনে রাখা হয় না। সেটা বোঝা যাবে নীচের অংক দুটোকে তুলনা করলেই।

Example 7: $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$-এর মান নির্ণয় করো।[2] **(HS2019)**

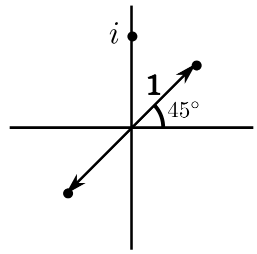


Fig 16

SOLUTION: ছবি দিয়ে square root বার করার কায়দাটা এখানে খুব কাজে দেবে। Fig 16 দেখলেই বুঝবে $\sqrt{i}$-এর সদস্যরা তীরচিহ্ন হিসেবে কীরকম। ছবি দেখেই বোঝা যাচ্ছে যে $\sqrt{i} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}$. অবশ্যই গুছিয়ে লেখার সময়ে সময়ে খালি "চিত্র দেখিয়া পাইলাম" বলে ছেড়ে দিলেই হবে না। কিন্তু ছবি দিয়ে আগে ভাগে উত্তরটা আঁচ করে ফেলার সুবিধা আছে। প্রথমেই দ্যাখো $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2 = \frac{1}{2}(1-1+2i) = i$. আমরা এটাকেই উল্টে লিখে দেব।

> $i = \frac{1}{2}(1+i^2+2\times 1\times i) = \frac{1}{2}(1+i)^2$. **সুতরাং** $\sqrt{i} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\}$.
>
> **একইভাবে,** $-i = \frac{1}{2}(1+i^2-2\times 1\times i) = \frac{1}{2}(1-i)^2$. **সুতরাং** $\sqrt{-i} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\}$.

এবার এদেরকে যোগ করার পালা। এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান, আমরা কিন্তু সরাসরি দুটো complex number-কে যোগ করছি না, দুটো set-কে যোগ করছি। তার মানে একটা set-এর প্রতিটা সদস্যের সাথে অন্য set-এর প্রতিটা সদস্যকে যোগ করতে হবে।

> **সুতরাং**
>
> $$\sqrt{i}+\sqrt{-i} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right\} + \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\} = \left\{\pm\sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}\right\}.$$

কী করে এই চারটে complex number পেলাম সেটা বুঝে নাও--

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i) &= \sqrt{2},\\
\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i) &= i\sqrt{2},\\
-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i) &= -i\sqrt{2},\\
-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i) &= -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

■

এই অংকটার সঙ্গে নীচের অংকটা তুলনা করো। এটা প্রায় একই অংক, কিন্তু এখানে প্রশ্নের ভাষায় গুরুতর সমস্যা আছে।

Exercise 6: $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$-কে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করো। **(HS2013)**
HINT: সম্ভবতঃ প্রশ্নকর্তা $\sqrt{i}$ বলতে মনে মনে কোনো একটা complex number ভেবে নিয়েছেন, এবং $\sqrt{-i}$ মানে আরেকটা complex number ভেবেছেন। সেই কারণেই তাঁর হিসেব অনুযায়ী $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ হয়েছে একটা complex number, যেটাকে $A+iB$ আকারে লেখা যায়। তাছাড়া বোধহয় তিনি $A, B\in\mathbb{R}$ শর্তটাও দিতে ভুলে গিয়েছেন। যাই হোক, এইসব

ত্রুটি বাদ দিলে অংকটা আগের মতই। ■

Example 8: যদি $\sqrt[3]{x+iy} = a+ib \ \ (a \neq 0, b \neq 0)$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4(a^2 - b^2).$$

(HS2012)

SOLUTION: এখানে আসলে বলতে চেয়েছে যে, $a+ib$ হল $x+iy$-এর <u>একটা</u> cube root. অংকের ভাষায় লিখলে লেখা উচিত $a+ib \in \sqrt[3]{x+iy}$, কারণ এখানে $\sqrt[3]{x+iy}$ হল একটা set (যার মধ্যে ঠিক তিনটে সদস্য আছে)। অথবা লিখতে পারো $(a+ib)^3 = x+iy$. আমরা সেটাই লিখব--

> **বলা আছে** $(a+ib)^3 = x+iy$.

এবার আমরা $(a+b)^3$-এর ফর্মুলা লাগাব। ফর্মুলাটা complex number-দের বেলাতেও কাজ করে, কারণ যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের নিয়মগুলো real number-দের বেলায় যেমন, complex number-দের বেলাতেও তেমনি।

> **সুতরাং** $a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3) = x + iy.$
> **অতএব** real **এবং** imaginary **অংশ সমান করে পাচ্ছি** $a^3 - 3ab^2 = x$ **এবং** $3a^2b - b^3 = y.$
> **সুতরাং** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = (a^2 - 3b^2) + (3a^2 + b^2) = 4(a^2 - b^2)$ **(প্রমাণিত)।**

■

13.4 Roots of unity

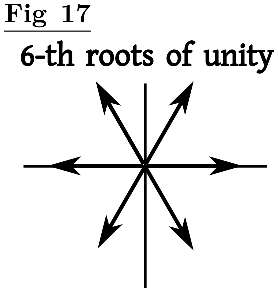
এখানে **unity** মানে হল 1. অন্য যেকোনো non-zero complex number-এর মত 1 এরও ঠিক n খানাই n-th root আছে (যেখানে $n = 1, 2, 3, ...$)। যাই n নাও না কেন, 1 যে 1-এর একটা n-th root, সেটা তো বুঝতেই পারছ, কারণ $1^n = 1$. সুতরাং 1 থেকে শুরু করে ফুলের পাপড়ির মত ঘুরে ঘুরে বাকি root-গুলো পেয়ে যাবে (Fig 17)। এদেরকে লিখে প্রকাশ করার একটা চমৎকার কায়দা আছে। দুটো পরপর পাপড়ির মধ্যে কোণ হবে $\frac{360°}{n}$. একে যদি θ বলি, তবে 1 থেকে শুরু করে পরপর পাপড়িগুলোর কোণ হবে

$$0, \ \ \theta, \ \ 2\theta, \ \ ..., \ \ (n-1)\theta.$$

পাপড়িগুলোর প্রত্যেকটারই modulus হল 1. সুতরাং ওদেরকে এইভাবে লেখা যাবে--

$$\cos 0 + i \sin 0, \ \ \cos\theta + i\sin\theta, \ \ \cos 2\theta + i \sin 2\theta, \ \ ..., \cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta).$$

<u>**Fig 17**</u>



সংক্ষেপে 1-এর n-th root-দের লেখা যায়

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

এখানে radian ব্যবহার করেছি, তাই $360°$-র বদলে 2π রয়েছে।
এই root-গুলোকে আরো সংক্ষেপে লেখা যায়। যদি $k = 1$-এর জন্য যে root-টা পাচ্ছ, সেটাকে ρ নাম[1] দাও, তবে লক্ষ করো যে সবগুলো root-কেই তুমি ρ দিয়ে লিখতে পারো, এইভাবে--

$$1, \ \rho, \ \rho^2, \ ..., \ \rho^{n-1}.$$

কেমন দিব্যি একটা GP-তে (মানে geometric progression-এ) রয়েছে, না?

Exercise 7: যদি তুমি 1-এর যাবতীয় n-th root-দের যোগ করে দাও, তবে কত হবে?
HINT: কী করে একটা GP-কে যোগ করে জানো তো? না জানলে বলে দিই। যদি $a \neq 1$ হয়, তবে--

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}.$$

■

আমরা 1-এর n-th root-দের ব্যবহার করে, অন্য যেকোনো non-zero complex number-এর n-th root-দেরও প্রকাশ করে ফেলতে পারি। তার জন্য খালি সেই complex number-টার যেকোনো <u>একটা</u> n-th root জানা থাকাই যথেষ্ট। সেটা নিয়েই নীচের অংক দুটো।

Exercise 8: ধরো $w \neq 0$ হল কোনো একটা complex number. এটাকে তীরচিহ্ন হিসেবে কল্পনা করো। তাহলে $w\rho$-এর তীরচিহ্নটা কীরকম দেখতে হবে? এখানে ρ-র সংজ্ঞা এক্ষুণি যেমন আলোচনা করলাম, সেটাই। ■

Exercise 9: ধরো $z \neq 0$ একটা কোনো complex number, যার একটা n-th root হল w. যদি 1-এর n-th root-গুলো হয় $1, \rho, \rho^2 ..., \rho^{n-1}$, তবে দেখাও যে z-এর যাবতীয় n-th root লিখে দাও। ■

DAY 14
Cube root (প্রথম পর্ব)

যেকোনো complex number-এরই n-th root-গুলোকে ছবি দিয়ে কল্পনা করার কায়দা গতকালই বলেছি। ওরা origin-কে কেন্দ্র করে একটা ফুলের পাপড়ির মত সমান সমান কোণের অন্তরে সাজানো থাকে। এই কথাটা যেকোনো complex number-এর ক্ষেত্রেই খাটে[2]। এদের মধ্যে 1-এর n-th root-গুলো দিয়ে যে অন্য যেকোনো non-zero complex number-এর n-th root-দের প্রকাশ করা যায়, সে কথাও বলেছি।
বিভিন্নরকম root-এর মধ্যে কেন জানি না পরীক্ষকরা 1-এর cube root-দের বেজায় পছন্দ করেন। এদের নিয়ে নানা অংক তাই বিভিন্ন পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে প্রায়ই উঁকি মারে। আজকে আর কালকে এদের নিয়ে আমরা কিছু আলোচনা করব। Complex algebra শেখার জন্য এই আলোচনাটা খুব দরকারী কিছু নয়।
প্রথম কথা, 1-এর cube root-দের ছবি এঁকে ফেলা খুবই সহজ, 1-এর একটা cube root তো 1 নিজেই। সেটাকে প্রথম পাপড়ি ধরে সমান সমান অন্তরে আরো দুটো পাপড়ি আঁকতে হলে, ওদের মধ্যে কোণগুলো হবে $\frac{360}{3}^{\circ} = 120°$. প্রতিটা

[1] এই গ্রীক অক্ষরটার নাম rho (রো)।
[2] হ্যাঁ, $0 + 0i$-এর ক্ষেত্রেও, যদিও সেখানে ফুলটা ছোটো হতে হতে একটা বিন্দু হয়ে যায় বলে পাপড়িগুলোকে আর আলাদা করা যায় না।

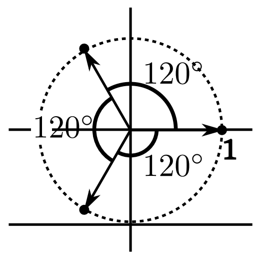


Fig 18

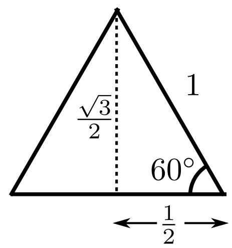


Fig 19

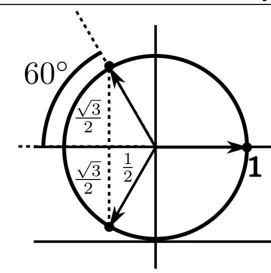


Fig 20

পাপড়ির দৈর্ঘ্যই 1, (যেহেতু 1-এর modulus হল 1)। সুতরাং ছবিটা হবে Fig 18-এর মত। চট্ করে Fig 19-এর মত equilateral (সমবাহু) ত্রিভুজদের মাপজোকটা মনে করে নিলেই বুঝবে যে, 1-এর cube root তিনজন হল--

$$1, \quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i \text{ এবং } -\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i.$$

ভালো করে বোঝার জন্য Fig 20 দেখে নিতে পারো। এই তিনটে সংখ্যা ভালো করে খেয়াল রেখো। এদের মধ্যে একজন তো 1. বাকি দুজনের কেউই real নয়। তাই অনেক সময়ে এদেরকে বোঝানোর জন্য non-real cube roots of 1 বলা হয়। এরা দুজনেই দুজনের square. ভারী অদ্ভুত ব্যাপার, ঠিক যেন দুটো লোক, দুজনেই দুজনের বাবা, আর দুজনেই দুজনের ছেলে। এই কারণে এই non-real cube root দুটোর একটাকে ω আর অন্যটাকে ω^2 বলে[3]। সমস্যা হল দুটো non-real cube root-এর কোন্‌টা যে ω আর কোনটা ω^2 সেটা প্রায়শঃই ঠিক করে বলা হয় না। আমরা যে প্রশ্নগুলো আলোচনা করব, তাতে যেকোনোটাকে খুশি ω ধরে এগোলেই হবে, উত্তর একই থাকবে। সেই একটা ইংরাজি হাসির কবিতা পড়েছিলাম, সেখানে এক জোড়া যমজ ভাইয়ের কথা ছিল। তারা নাকি এতই একরকম দেখতে যে কেউই তাদের আলাদা করতে পারত না। শেষটায় এক ভাই মরে গেলে পাড়ার লোকে ভুল করে অন্য ভাইটাকে কবর দিয়ে ফেলেছিল!

তা, আমাদের ω আর ω^2 কতকটা সেইরকম যমজ ভাই, তবে এখানে যমজ হবার দুঃখ যমের দুয়ার অব্‌ধি গড়াবে না। তার প্রধান কারণ নীচের theorem দুটো, যেগুলো ω-র জায়গায় ω^2 বসালেও অপরিবর্তিত থাকে।

THEOREM

- যদি ω-টা 1-এর কোনো একটা non-real cube root হয়, তবে $\frac{1}{\omega}=\omega^2$ এবং $\frac{1}{\omega^2}=\omega$ হবে।
- বিপরীতপক্ষে, যদি এমন কোনো nonreal সংখ্যা $a\in\mathbb{C}$ পাও যাতে $\frac{1}{a}=a^2$ আর $\frac{1}{a^2}=a$ শর্ত দুটোর মধ্যে একটাও পালিত হয়, তবে অন্যটাও পালিত হবে এবং অবশ্যই a আর a^2 হবে 1-এর non-real cube root দুটো।

কেন এমন হবে, সেটা বোঝা শক্ত নয় মোটেই, কারণ $\frac{1}{a}=a^2$ আর $a^3=1$ আসলে একই কথা।

নীচের theorem-টাও একইরকম। এখানে খালি এটা ব্যবহার করব যে x^3-1-কে ভেঙে লিখলে $(x-1)(1+x+x^2)$ হয়।

[3] অনেকটা w-এর মত হলেও, এই ω-টা আসলে একটা গ্রীক অক্ষর, ছোটোহাতের ওমেগা।

THEOREM

- যদি ω-টা 1-এর কোনো একটা non-real cube root হয়, তবে $1+\omega+\omega^2=0$ হবে।
- বিপরীতপক্ষে, যদি এমন কোনো $a \in \mathbb{C}$ পাও যাতে $1+a+a^2=0$, তবে অবশ্যই a এবং a^2 হবে 1-এর non-real cube root দুটো।

এই প্রসঙ্গে আরেকটা জিনিসও লক্ষ করো, 1-এর non-real cube root দুটো পরস্পরের complex conjugate-ও বটে! যেহেতু $1+\omega+\omega^2=0$, তাই ω^2, ω^3, ω^4 ইত্যাদি যত বড় power-ই দিক না কেন, সব কিছুকেই $a+b\omega$ আকারে লিখে ফেলা যায়, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$. যেমন ধরো দিলাম

$$1+2\omega-10\omega^2+3\omega^3+4\omega^4-\omega^5.$$

তুমি প্রথমেই $\omega^3=1$ ব্যবহার করে পেয়ে যাবে $\omega^4=\omega$ আর $\omega^5=\omega^2$. সুতরাং

$$1+2\omega-10\omega^2+3\omega^3+4\omega^4-\omega^5=1+2\omega-10\omega^2+3+4\omega-\omega^2=4+6\omega-11\omega^2.$$

এবার $\omega^2=-1-\omega$ ব্যবহার করলে এটা আরো সহজ হয়ে যাবে--

$$4+6\omega-11\omega^2=4+6\omega+11(1+\omega)=15+17\omega.$$

ঠিক এই কায়দাতেই নীচের অংকটা ঘায়েল করার চেষ্টা করো।

Exercise 10: 1-এর একটি অবাস্তব ঘনমূল ω হলে দেখাও যে,

$$(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})=9.$$

(HS2010) ■

আরো একটা একইরকমের অংক।

Exercise 11: ω, 1-এর অবাস্তব ঘনমূল হলে, $(3+\omega+3\omega^2)^4$-এর মান হবে

(A) 16

(B) 16ω

(C) $16\omega^2$

(D) কোনোটিই নয়

[1]
(HS2017) ■

Exercise 12: যদি ω, 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{x\omega^2+y\omega+z}{x\omega+y+z\omega^2}=\left(\frac{x\omega+y+z\omega^2}{x\omega^2+y\omega+z}\right)^2.$$

(HS2014)
HINT: প্রথমে একটা ছোট্টো জিনিস করে গা গরম করে নাও। ধরো তোমাকে বললাম $2\omega+3$ থেকে ω "কমন" নিতে। কী করে করবে? গোড়াতেই $2\omega+3 = 2\omega+3\omega^3$ লিখে নিলেই সেটা বুঝতে পারবে। এবার বাঁদিকের উপরতলায় যে $x\omega^2+y\omega+z$ আছে, সেটার থেকে ω "কমন" নিয়ে দ্যাখো তো কিছু সুবিধা হয় কিনা! ■

Exercise 13: যদি $x = a+b$, $y = a\omega+b\omega^2$, $z = a\omega^2+b\omega$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = a^3+b^3$, যেখানে ω হল 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল।
(HS2012)
HINT: সাধারণভাবে গুণ করে গেলেই হবে। যখনই ω-র বড় কোনো power আসবে, তখনই $\omega^3 = 1$ আর $\omega^2 = -1-\omega$ ব্যবহার করে ওদেরকে ছেঁটে দিতে ভুলো না। ■

নীচের অংকটা একই জিনিসের সামান্য কঠিন সংস্করণ।

Exercise 14: Let $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5$. If $R(z)$ and $I(z)$ respectively denote the real and imaginary parts of z, then

(A) $R(z) > 0$ and $I(z) > 0$

(B) $R(z) < 0$ and $I(z) > 0$

(C) $R(z) = -3$

(D) $I(z) = 0$

(jeemain.2019)
HINT:
এই অংকে $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$-টাকে দেখেই তোমাকে বুঝে ফেলতে হবে যে এটাকে এইভাবে লেখা যায়--

$$-i \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\text{1-এর একটা cube root}} .$$

একইভাবে $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ হল $i\times$ অন্য cube root-টা। এদের মধ্যে প্রথম cube root-টাকে ω বললে, অন্যজন ω^2. সুতরাং $z = (-i\omega)^5 + (i\omega^2)^5$. এবার $i^4 = 1$ আর $\omega^3 = 1$. সুতরাং $(-i\omega)^5 = (-1)^5 \times i^5 \times \omega^5 = i\omega^2$ এবং একইভাবে $(i\omega^2)^5 = i\omega$. সুতরাং $z = -i\omega^2 + i\omega$. বাকিটুকু তুমিই করো। ■

Exercise 15: যদি $z^2+z+1 = 0$ হয়, তবে $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2 + \cdots + \left(z^7+\frac{1}{z^7}\right)^2$-এর মান হবে--

(A) 27

(B) 45

(C) 13

(D) 7

[1]
(HS2019)
HINT:
যেহেতু $z^2+z+1=0$, তাই বলতে পারি যে, $z^3=1$ হবে, কারণ $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$.
সুতরাং $\frac{1}{z}=z^2$ এবং $\frac{1}{z^2}=z$ $z+z^2=-1$. তাই প্রথম দুটো term-ই আসলে $(-1)^2=1$. তৃতীয় term-টা হল $(1+1)^2=4$. এইভাবে এখানে প্রতিটা term-ই হয় 1 নয়তো 4. মোট আছে সাতটা term, প্রতি তিনটের মাথায় একটা করে 4 আসবে, বাকিগুলো সবাই 1. তার মধ্যে তৃতীয় আর ষষ্ঠ term দুটো খালি 4, বাকি পাঁচটাই 1. সুতরাং যোগ করলে কী হবে তুমিই বল।
■

এবারের অংকটার জন্য একটা জিনিস জানা থাকলে সুবিধা হবে--কী করে একটা 3×3 matrix-এর determinant বার করতে হয়। যদি matrix-টা হয়

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & j & k \end{bmatrix},$$

তবে তার determinant হবে এই সংখ্যাটা--

$$a(fk-gj)-b(ek-gh)+c(ej-fh).$$

এমন একটা বিদ্ঘুটে জিনিস খায় না মাথায় মাখে, তা নিয়ে আলোচনা করার জায়গা এটা নয়। আপাততঃ এই ফর্মুলাটুকু মনে রাখলেই পরের অংকটা নিয়ে মাথা ঘামাতে পারবে।

Exercise 16: Let w be a complex number such that $2w+1=z$, where $z=\sqrt{-3}$. If

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -w^2-1 & w^2 \\ 1 & w^2 & w^7 \end{vmatrix} = 3k,$$

then k is equal to

(A) 1

(B) $-z$

(C) z

(D) -1

(jeemain.2017)
HINT:
এখানে $z=\sqrt{-3}$ লেখাটা ঠিক হয় নি, কারণ $\sqrt{-3}$ বোঝায় দুই element-ওয়ালা একটা set বোঝায়। তার চেয়ে $z^2=-3$ লিখলে ভালো করত।
একটু ঘুরিয়ে বলেছে বটে, কিন্তু নিশ্চয়ই চিনতে পেরেছ যে, w হল 1-এর non-real cube root-দের কোনো একটা, মানে $w^3=1$. সুতরাং

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -w^2-1 & w^2 \\ 1 & w^2 & w^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}.$$

এখানে আমরা খালি $-w^2 - 1 = w$ আর $w^7 = w$ লিখে এটা পেয়েছি। এবার সরাসরি determinant-টা বার করে ফেললেই পাবে--

$$1 \times (w^2 - w^4) - 1 \times (w - w^2) + 1 \times (w^2 - w) = (w^2 - w) - (w - w^2) + (w^2 - w) = 3w^2 - 3w.$$

বাকিটুকু নিজে নিজে করে নাও।
■

14.1 ω-র মস্ত মস্ত power

নিশ্চয়ই লুডো খেলার সময়ে তিন ছক্কা পড়লে কেটে যাওয়ার নিয়ম জানো? যদি তোমার খালি পরপর ছক্কাই পড়তে থাকে, তবে মোট কতরকম সংখ্যা তুমি পেতে পারো? প্রথম ছক্কায় 6, দ্বিতীয় ছক্কায় আরো 6, মানে $6+6=12$, তৃতীয় ছক্কায় সব কেটে 0, আবার চতুর্থ ছক্কায় নতুন করে 6, এইভাবে চলতেই থাকবে। কোনো দিনই তুমি 0, 6 আর 12-র বাইরে অন্য কিছু পাবে না। এবার চট্ করে বলো তো যদি পরপর 100-টা ছক্কা পড়ে, তবে কত সংখ্যা হবে? প্রতি তিনটে করে ছক্কা কেটে যাচ্ছে। এইভাবে প্রথম 99 বারে 33 বার কাটাকাটি হয়ে শূন্য হবে। পড়ে থাকবে খালি একটাই ছয়। সেটাই উত্তর। আশা করি বুঝতে পারছ যে, এখানে একটা "তিন দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নেওয়া"-র গল্প আছে। যেমন, যদি 500 বার পরপর ছক্কা পড়ত, তবে সংখ্যাটা হত $2 \times 6 = 12$, কারণ 500-কে 3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নিলে পাবে 2.
ঠিক একইরকম ব্যাপার ω-র power-এর বেলাতেও, কারণ তিনটে ω গুণ করলেই কাটাকাটি হয়ে গিয়ে $\omega^3 = 1$ হয়ে যায়। সুতরাং ω^{100} বার করার সময়ে 100-কে "3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ" বার করার গল্পটা এখানেও খাটবে--

$$\omega^{100} = \omega^{3\times 33+1} = \left(\omega^3\right)^{33} \times \omega = \omega.$$

Exercise 17: Let z_0 be a root of the quadratic equation $x^2+x+1=0$. If $z = 3+6iz_0^{60} - 3iz_0^{93}$, then arg z is equal to

(A) $\frac{\pi}{4}$

(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) 0

(D) $\frac{\pi}{6}$

(jeemain.2019)

HINT: এই অংকে সেই সমস্যা আবার হয়েছে, arg দিয়ে আসলে Arg বুঝিয়েছে। যাই হোক, এখানে ω অক্ষরটা ব্যবহার করে নি। কিন্তু বুঝতেই পারছ z_0 হল 1-এর একটা non-real cube root. সুতরাং $z_0^3 = 1$. ■

এবারের অংকটা খুবই একইরকম, খালি একটা অপ্রত্যাশিত প্যাঁচ আছে।

Exercise 18: If $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ are the distinct roots of the equation $x^2 - x + 1 = 0$, then $\alpha^{101} + \beta^{107}$ is equal to

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

(jeemain.2018)

HINT: সাবধান, x^2-x+1 বলেছে, x^2+x+1 নয়। তাই এই α আর β কিন্তু মোটেই ω আর ω^2 নয়! তবে তাতে খুব কিছু অসুবিধা নেই, কারণ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ যেমন হয়, তেমনি আবার $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$-ও হয়। তাই α আর β হল -1-এর দুটো non-real cube root. সুতরাং যেভাবে আমরা ω-এর বিভিন্ন ধর্ম পেয়েছিলাম, সেভাবেই পেয়ে যাবে $\alpha^2=-\beta$ এবং $\beta^2=-\alpha$. আর $\alpha^3=\beta^3=-1$ তো আছেই। সুতরাং আবার "3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ" নেবার গল্পটা ব্যবহার করা যাবে। ■

আমরা ω-র বড় বড় power-দের বার করা শিখেছি, "3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ" নেওয়ার কায়দায়। অনেক সময়ে power-এর উপরতলার সংখ্যাটা পুরো বলে বলে দেওয়া না থাকলেও এই কায়দাটা কাজ করে। যেমন যদি বলি ω^{3n} বার করো (যেখানে $n\in\mathbb{Z}$), তবে n না জানলেও উত্তর বার করে দেওয়া যাবে, কারণ যাই $n\in\mathbb{Z}$ নাও না কেন, $3n$ অবশ্যই 3 দিয়ে ভাগ যাবে, তাই

$$\omega^{3n}=\left(\omega^3\right)^n=1^n=1.$$

নীচে এরকম কয়েকটা অংক দিচ্ছি।

Exercise 19: যদি ω, 1-এর একটি অবাস্তব ঘনমূল হয়, তবে $\omega^{3n}+\omega^{3n+1}+\omega^{3n+2}$ (যেখানে $n\in\mathbb{N}$)-এর মান হয়

(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) ω

[1] **(HS2020)** ■

Exercise 20: $\omega^n+\omega^{2n}$-এর মান (যেখানে $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ এবং $n=3k+1$)

(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) কোনোটিই নয়

[1]
(HS2018) ■

Example 9: প্রমাণ করো যে $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots 2n$ পদ পর্যন্ত $=2^{2n}$. [5] **(HS2020)**

SOLUTION:

> **এখানে** k **নম্বর পদটা হল** $(1-\omega^{2^{k-1}}+\omega^{2^k})$, **যেখানে** $k=1,...,2n$.

তার মানে ω-র power-টা সর্বদাই 2-এর কোনো power হচ্ছে। প্রশ্ন হল 2-এর power-দের 3 দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নিলে কী পাওয়া যায়? কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে দেখা যাক--

2^0-র বেলায় 1,

2^1-র বেলায় 2,

2^2-র বেলায় 1,

2^3-র বেলায় 2,

ইত্যাদি।

প্যাটার্নটা চিনতে পারছ? যদি k-টা বিজোড় হয়, তবে ভাগশেষটা হবে 1, আর k যদি জোড় হয়, তবে ভাগশেষটা হবে 2.

> **যেহেতু** 2^k**-কে** 3 **দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে হয়** 1 **(যদি** k **বিজোড় হয়), নয়তো** 2 **(যদি** k **জোড় হয়), তাই যাবতীয় বিজোড়-সংখ্যক পদ হল** $1-\omega+\omega^2=-2\omega$.
> **আবার, যাবতীয় জোড়-সংখ্যক পদ হল** $1-\omega^2+\omega=-2\omega^2$.
> **যেহেতু ঠিক** n**-খানা জোড় আর** n**-খানা বিজোড় পদ আছে, তাই সব মিলিয়ে পাচ্ছি** $(-2\omega)^n\times(-2\omega^2)^n=2^{2n}$ **(প্রমাণিত)।**

■

এবারের অংকটা একই ধারণার উপরে দাঁড়িয়ে আছে, কিন্তু একটু মাথা গুলিয়ে যাওয়া অসম্ভব নয়।

Exercise 21: Let ω denote a cube root of unity, which is not equal to 1. Then the number of distinct elements in the set

$$\{(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n)^m \;\;:\;\; m,n=1,2,3,...\}$$

is

(A) 4

(B) 5

(C) 7

(D) infinite

(ISI2016)

HINT:

যেহেতু $1+\omega+\omega^2=0$, তাই $1+\omega+\omega^2+\omega^3$ আসলে ফের ওই 1-ই। সুতরাং এরকমভাবে ω-র power-দের যতই যোগ করি না কেন, 1, $1+\omega$ এবং 0 ছাড়া আর কিছুই আসবে না। অতএব--

$$\{1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n \;\;:\;\; n=1,2,3,...\}=\{1,1+\omega,0\}=\{1,-\omega^2,0\}.$$

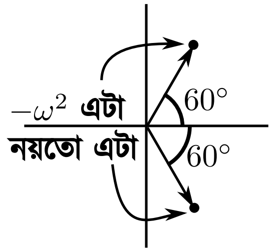


Fig 21

তা থেকে--

$$\begin{aligned} & \{(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n)^m \ : \ m,n=1,2,3,...\} \\ = \ & \{1^m \ : \ m=1,2,3,...\} \cup \{(-\omega^2)^m \ : \ m=1,2,3,...\} \cup \{0^m \ : \ m=1,2,3,...\}. \end{aligned}$$

এর মধ্যে প্রথমটা $\{1\}$ আর তৃতীয়টা $\{0\}$. দ্বিতীয়টার সাইজ 6. কেন? সেটা বোঝার একটা পথ হল ছবি দিয়ে (Fig 21)। যেহেতু $\frac{360^\circ}{60^\circ}=6$, তাই ω^2-এর পরপর power নিতে থাকলে ঠিক 6 নম্বর বারে 1-এ পৌঁছবে। এবং এই power-গুলোর মধ্যে 1 আছে, যদিও 0 নেই। এবার বাকিটুকু নিজে করো। ■

এই যে আমরা $\{(-\omega^2)^n \ : \ n=1,2,3,...\}$-এর সাইজ 6 বার করলাম, সেটা চাইলে ছবি ছাড়াও করা যেত, এইভাবে-- এখানে $-\omega^2=(-1)\times\omega^2$. যেহেতু ω^2-ও হল 1-এর একটা cube root, তাই ওটার পরপর power নিতে থাকলে, প্রতি তিনটের পর থেকে একই জিনিস ফিরে ফিরে আসবে--

$$(\omega^2)^1=\omega^2, \quad (\omega^2)^2=\omega, \quad (\omega^2)^3=1, \quad \underbrace{(\omega^2)^4=\omega^2, \quad (\omega^2)^5=\omega, \quad (\omega^2)^6=1}_{\text{আগের তিনটেই আবার}}, \quad ...$$

ওদিকে -1-এর পরপর power নিতে থাকলে প্রতি দুবারের মাথায় ফিরে ফিরে আসবে--

$$(-1)^1=-1, \quad (-1)^2=1, \quad \underbrace{(-1)^3=-1, \quad (-1)^4=1}_{\text{আগের দুটোই আবার}}, \quad ...$$

অতএব $-1\times\omega^2$-এর power নিতে থাকলে একই জিনিস ফিরে ফিরে আসা শুরু করবে $2\times3=6$-টা পরে পরে। এই যুক্তিটা বুঝে থাকলে নীচের অংকটাও করতে পারবে।

Exercise 22: নীচের set-গুলোর সাইজ বার করো--

1. $\{(i\omega)^n \ : \ n=1,2,3,...\}$,
2. $\{(-i\omega)^n \ : \ n=1,2,3,...\}$,
3. $\{(-\omega)^n \ : \ n=1,2,3,...\}$,
4. $\{(i\alpha)^n \ : \ n=11,12,13,...\}$, যেখানে α হল 1-এর এমন একটা 6-th root যাতে $\alpha,\alpha^2,...,\alpha^5\neq 6$

HINT:
শেষেরটার বেলায় সাবধান! ■

Example 10: Let $\omega \neq 1$ be a complex cube root of unity. If

$$(3-3\omega+2\omega^2)^{4n+3}+(2+3\omega-3\omega^2)^{4n+3}+(-3+2\omega+3\omega^2)^{4n+3}=0,$$

then possible value(s) of n is(are)... **(jeeadv.p1.2015)**

SOLUTION: প্রথমে লক্ষ করো, $(3-3\omega+2\omega^2)$ এবং $(2+3\omega-3\omega^2)$ এবং $(-3+2\omega+3\omega^2)$-এর মধ্যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক রয়েছে--

> Here $(3-3\omega+2\omega^2)=\omega(-3+2\omega+3\omega^2)$.
> Similarly, $(2+3\omega-3\omega^2)=\omega^2(-3+2\omega+3\omega^2)$.

সেটা কাজে লাগিয়ে অনেকটাই সহজ করা যাবে--

> So
>
> $$\begin{aligned}&(3-3\omega+2\omega^2)^{4n+3}+(2+3\omega-3\omega^2)^{4n+3}+(-3+2\omega+3\omega^2)^{4n+3}\\ &=\left(1+\omega^{4n+3}+(\omega^2)^{4n+3}\right)(-3+2\omega+3\omega^2)^{4n+3}\\ &=\left(1+\omega^n+(\omega^2)^n\right)(-3+2\omega+3\omega^2)^{4n+3}\quad [\because w^3=1]\\ &=\left(1+\omega^n+\omega^{2n}\right)(-6-\omega)^{4n+3}\quad [\because 1+\omega+w^2=0]\end{aligned}$$
>
> Hence the given condition holds if and only if
>
> $$\left(1+\omega^n+\omega^{2n}\right)(-6-\omega)^{4n+3}=0.$$

দুটো জিনিসের গুণফল হল 0. সুতরাং এদের মধ্যে অন্ততঃ একজন 0 হতে বাধ্য। এখন $(-6-\omega)$ তো আর 0 হতে পারে না, কারণ তাহলে তো ω হয়ে যায় -6. সুতরাং--

> Now, $\because -6-\omega \neq 0$, $\therefore 1+\omega^n+\omega^{2n}=0$,
> or $1+\omega^n+(\omega^n)^2=0$.

তার মানে ω^n হচ্ছে $1+x+x^2=0$-র একটা root. আমরা জানি যে, $1+x+x^2=0$-র খালি দুটোই root সম্ভব, ω আর ω^2. সুতরাং--

> $\omega^n=\omega$ or $\omega^n=\omega^2$.
>
> Since $\omega^3=1$, hence $\omega^n=\omega$ holds if and only if $n=3k+1$ for some $k\in\mathbb{Z}$.
>
> Similarly, $\omega^n=\omega^2$ holds if and only if $n=3k+2$ for some $k\in\mathbb{Z}$.
>
> Thus, the required set of all possible values of n is $\{3k+1 \ : \ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{3k+2 \ : \ k\in\mathbb{Z}\}$.

■

DAY 15
Cube root (দ্বিতীয় পর্ব)

আজকে আমরা 1-এর cube root-দের নিয়ে আরো কিছু অংক দেখব। আগেই বলেছি এই অংকগুলো নিতান্তই পরীক্ষামার্কা অংক। যারা বিষয়টা উপভোগ করার জন্য এই বইটা পড়ছ, তারা এই অংকগুলোতে খালি হাল্কা করে চোখ বুলিয়ে ছেড়ে দিতে পারো।

Example 11: Suppose that z is any complex number which is not equal to any of $\{3, 3\omega, 3\omega^2\}$, where ω is a complex cube root of unity. Then

$$\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z-3\omega}+\frac{1}{z-3\omega^2}$$

equals

(A) $\frac{3z^2+3z}{(z-3)^3}$

(B) $\frac{3z^2+3\omega z}{z^3-27}$

(C) $\frac{3z^2}{z^3-3z^2+9z-27}$

(D) $\frac{3z^2}{z^3-27}$

(ISI2016)

SOLUTION: এই অংকটা গায়ের জোরেই করে ফেলা যায়। কিন্তু একটা ঠকানো কায়দাও বলি। লক্ষ করো, $z \in \mathbb{R}$ হলে উত্তরটা একটা real number হওয়া উচিত, কারণ $\frac{1}{z-3}$ হবে real, আর বাকি দুজন পরস্পরের conjugate. সুতরাং (B) বাদ গেল। আরো লক্ষ করো, নীচে z^3-27 থাকা উচিত, কারণ $(z-3)(z-3\omega)(z-3\omega^2) = z^3-27$. তাই (A) আর (C)-ও বাদ গেল। সুতরাং পড়ে রইল (D). ■

Example 12: Let $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, where $i=\sqrt{-1}$ and $r, s \in \{1,2,3\}$. Let

$$P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^3 & z^r \end{bmatrix}$$

and I be the identity matrix of order 2. Then the total number of ordered pairs (r,s) for which $P^2=-I$ is... **(jeeadv.p1.2016)**

SOLUTION: এই অংকটা পড়ে প্রথমে মাথা গুলিয়ে যেতে পারে। বলে দিয়েছে $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, যেটাকে দেখেই তুমি নিশ্চয়ই ধাঁ করে 1-এর একটা non-real cube root বলে চিনে ফেলেছ। এখানে আবার সেই $i=\sqrt{-1}$ লিখেছে, যার বদলে $i^2=-1$ বলা ভালো ছিল। যাই হোক, এই z-কে ব্যবহার করে একটা matrix বানিয়েছে

$$P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ z^3 & z^r \end{bmatrix},$$

যেখানে r, s দুজনেই 1 বা 2 বা 3. সুতরাং মোট $3\times 3 = 9$ রকমভাবে P-কে বানানো যাবে। যেমন ধরো, $r=1$ আর $s=1$ নিলে হবে

$$P = \begin{bmatrix} -z & z^2 \\ z^3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & z^2 \\ 1 & z \end{bmatrix},$$

যেহেতু $z^3=1$. আবার যদি $r=1$ আর $s=2$ নিতে, তবে পেতে

$$P = \begin{bmatrix} -z & z^4 \\ z^3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & z \\ 1 & z \end{bmatrix}.$$

প্রশ্ন হল r এবং s-এর কতগুলো value-এর জন্য $P^2 = -I$ হবে। এখানে ordered pair কথাটা লক্ষ করো, এর মানে "$s = 2$ আর $r = 3$ হওয়া" এবং "$r = 2$ আর $s = 3$ হওয়া"-কে আলাদা করে গুণতে হবে। সেটাই অবশ্য এমনিতেই স্বাভাবিক, তাই এখানে ordered pair কথাটা খালি অংকটাকে গুরুগম্ভীর শোনানোর জন্য ব্যবহার করা হয়েছে মাত্র।
অংকটা মোটেই তেমন শক্ত নয় অবশ্য, প্রথমেই P^2 বার করে নাও--

> We see that $z^3 = 1$, and so
> $$P = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ 1 & z^r \end{bmatrix}.$$
> Hence
> $$P^2 = \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ 1 & z^r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (-z)^r & z^{2s} \\ 1 & z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{2r} + z^{2s} & (-z)^r z^{2s} + z^{2s+r} \\ (-z)^r + z^r & z^{2r} + z^{2s} \end{bmatrix}.$$

এইবার এটাকে $-I$-এর সঙ্গে সমান করে দিলেই চারটে equation পাবে, যেহেতু matrix-টায় চারটে entry আছে। মনে রেখো যে, $-I$ হল এই matrix-টা--
$$-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

সুতরাং চারটে equation হবে এইরকম--

> Since $P^2 = -I$, we need
> $$z^{2r} + z^{2s} = -1 \quad (1)$$
> $$(-z)^r z^{2s} + z^{2s+r} = 0 \quad (2)$$
> $$(-z)^r + z^r = 0 \quad (3)$$
> $$z^{2r} + z^{2s} = -1. \quad (4)$$

এদের মধ্যে (1) আর (4) অবশ্য একই জিনিস।

> From (3) we get $(-z)^r = -z^r$. So r must be odd, ie, 1 or 3.

এবার আমরা দুটো কেসে ভেঙে এগোতে পারি--

> <u>Case I: $r = 1$:</u> Here
> $$\begin{aligned} z^2 + z^{2s} &= -1, \\ -z^{2s+1} + z^{2s+1} &= 0. \end{aligned}$$

এ দুটো এসেছে সেই চারটে equation-এর থেকে। ওদের মধ্যে একটা equation তো দুবার এসেছিল, তাই আসলে equation ছিল তিনটে। তার মধ্যেও একটা ব্যবহার করা হয়ে গেল r-কে odd দেখাতে। পড়ে রইল যে দুটো, তাদের মধ্যে $r = 1$ বসিয়ে এদের পেয়েছি।

> The second equation must always hold.
> Also $z^{2s} = -1 - z^2 = z$ (by property of cube roots of 1).

> So $s = 2$.

এটা কী করে হল বুঝলে তো? যদি $s = 1$ নাও, তবে $z^{2s} = z^2 \neq z$. যদি $s = 2$ নাও, তবে $z^{2s} = z^4 = z$. যদি $s = 3$ নাও, তবে $z^{2s} = z^6 = 1 \neq z$. অতএব খালি $s = 2$-র বেলাতেই $z^{2s} = z$ হচ্ছে।

> <u>Case 2: $r = 3$:</u> Here, $\because z^6 = 1$,
>
> $$\begin{aligned} 1 + z^{2s} &= -1, \\ -z^{2s} + z^{2s} &= 0. \end{aligned}$$
>
> The second equation always holds.
>
> Also $z^{2s} = -2$, which is impossible, since $|z| = 1$.
>
> So we have only one ordered pair $(r, s) = (1, 2)$.

প্রশ্নে জানতে চাওয়া হয়েছিল কটা ordered pair সম্ভব। তাই--

> Thus, the answer is 1.

■

Example 13: Let i be a root of the equation $x^2 + 1 = 0$ and let ω be a root of the equation $x^2 + x + 1 = 0$. Construct a polynomial

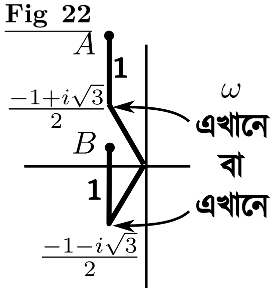
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

where $a_0, a_1, ..., a_n$ are all integers such that $f(i + \omega) = 0$. **(ISI2020)**

SOLUTION: প্রথমে ছবি দিয়ে ভেবে নিই। এখানে 1-এর কোন্ cube root-টাকে ω বলছি, তার উপর নির্ভর করে $i+\omega$ হতে পারে Fig 22-এর A বিন্দুতে বা B বিন্দুতে। আমরা এমনভাবে f বানাব, যাতে f-টা A আর B দু জায়গাতেই শূন্য হয়।

> If $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, then $i + \omega = -\frac{1}{2} + \underbrace{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{r} i = A$, say.

Fig 22



If $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, then $i + \omega = -\frac{1}{2} + \underbrace{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{s} i = B$, say.

We shall construct f such that $f(A) = f(B) = 0$.

Since f is a polynomial with real coefficients, we must also have

$$f(\overline{A}) = f(\overline{B}) = 0.$$

অংকটায় integer coefficient বলেছিল। কিন্তু এই ধাপে আমরা খালি এইটুকুই ব্যবহার করলাম যে coefficient-গুলো real (মনে রেখো, integer-রা সকলেই real)। আমরা যে তথ্যটা এখানে কাজে লাগালাম, সেটা হল--কোনো real coefficient-ওয়ালা polynomial-এর যে root-গুলো real হয় না, তারা conjugate হিসেবে জোড়ায় জোড়ায় থাকে।

So $f(x)$ must be divisible by

$$\begin{aligned}(x-A)(x-\bar{A})(x-B)(x-\bar{B}) &= \left(x+\tfrac{1}{2}-ir\right)\left(x+\tfrac{1}{2}+ir\right)\left(x+\tfrac{1}{2}-is\right)\left(x+\tfrac{1}{2}+is\right)\\ &= (y-ir)(y+ir)(y-is)(y+is) \quad \left[\text{putting } y = x+\tfrac{1}{2}\right]\\ &= (y^2+r^2)(y^2+s^2) = y^4 + (r^2+s^2)y^2 + r^2s^2.\end{aligned}$$

Now $r^2 + s^2 = 2\left(1+\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2}$ and $r^2s^2 = \left(1-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

এগুলো আমরা ছোটোবেলায় শেখা $(a+b)^2 + (a-b)^2$ আর $(a+b)(a-b)$-এর ফর্মুলা ব্যবহার করে করলাম।

So $f(x)$ must be divisible by $\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = g(x)$, say.

এই $g(x)$-টাকেই উত্তর হিসেবে দেওয়া চলত, কিন্তু সমস্যা হল $f(x)$-এর coefficient-গুলো আবার integer চেয়েছে। তার মানে এমন একটা integer coefficient-ওয়ালা polynomial চাই, যেটার একটা factor হয় এটা। লক্ষ করো $g(x)$-এর coefficient-গুলো সবই নানারকম fraction. ওদের নীচের তলায় সর্বদাই 2-এর বিভিন্ন power রয়েছে। Power-গুলো কোথাওই 2^4-এর চেয়ে বেশী নয়। তাই--

If we multiply $g(x)$ by 2^4, then the denominators will be cleared. So $f(x) = 2^4 g(x)$ is one answer.

■

এর পরের অংকটা সম্পূর্ণ অন্য স্বাদের।

Exercise 23: Let α, β, γ be complex numbers which are the vertices of an equilateral triangle. Then we must have:

(A) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

(B) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$

(C) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$

(D) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0.$

(ISI2018)

HINT:

এই অংকটা ছবি দিয়ে ভাবলে খুব সুবিধা হবে। প্রথমে মনে মনে কল্পনা করো $\mathbb{C}$ হল তেপান্তরের মাঠ, সেখানে কোথাও একটা equilateral triangle (সমবাহু ত্রিভুজ) শুয়ে আছে, α, β আর γ হল তারই তিনটে প্রান্ত। ত্রিভুজটা যেখানে খুশি থাকতে পারে, কোথায় $\mathbb{C}$-এর origin আছে, তার কোনো তোয়াক্কা না রেখেই। সুতরাং খামোখা $\alpha+\beta+\gamma=0$ হতে যাবে কেন? আর নেহাত যদি হয়েও যায়, তবে তুমি ওদের প্রত্যেকের সঙ্গে যদি কিছু একটা যোগ করে দাও (ধরো 5 যোগ করলে, মানে ত্রিভুজটাকে 5 ঘর ডানদিকে সরিয়ে দিলে), তাতে equilateral triangle-টা ফের equilateral-ই থাকবে, কিন্তু যোগফলটা তো $5+5+5=15$ বেড়ে যাবে, সুতরাং "যোগফলটা সর্বদাই শূন্য হবে" এটা স্রেফ বাজে কথা। অতএব (A) বাদ গেল। ঠিক একই যুক্তিতে (B) আর (C)-এরও প্রস্থান।

পড়ে রইল (D). সেটা যে ঠিক তা "by elimination"-এর ফাঁকি দিয়ে বলা যায়, কারণ ঠিক একটাই option ঠিক হবে বলা আছে। কিন্তু যদি সেটা বলা না থাকত? তাই (D)-টাকে অংক কষে প্রমাণ করা যাক। আবার ছবির সাহায্য নেব। এখানে $\alpha-\beta$ হল β থেকে α পর্যন্ত তীরচিহ্নটা। সেইভাবে দেখলে $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$ এবং $\gamma-\alpha$ হল পরস্পরের সঙ্গে 120° কোণে থাকা তিনটে সমান দৈর্ঘ্যের তীর। সাবধান, কোণগুলো 60° না হয়ে হঠাৎ 120° হল কী করে সেটা Fig 23 দেখে বুঝে নাও। তীরচিহ্নগুলোর গোড়া কোথায়, সেটা গুরুত্বপূর্ণ নয়, তাই ওদের দৈর্ঘ্য এবং অভিমুখ অপরিবর্তিত রেখে গোড়াগুলোকে origin-এ নিয়ে এসো (Fig 24)। ফুলের পাপড়ির পরিচিত বিন্যাসটা চোখে পড়ছে? ওদের মধ্যে কাউকে z বললে, বাকিরা যে $z\omega$ এবং $z\omega^2$ হবে, সেটা নিয়ে নিশ্চয়ই সন্দেহ নেই?

এবার বাকিটুকু নিজে করো।

■

Exercise 24: ধরো $z_1,...,z_5\in\mathbb{C}$ এমন যাতে ওরা একটা regular pentagon-এর (মানে সুষম পঞ্চভুজের) পাঁচটা vertex হয়। তবে

$$(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_4)^2+(z_4-z_5)^2++(z_5-z_1)^2$$

কত হবে? আর যদি

$$(z_1-z_2)^3+(z_2-z_3)^3+(z_3-z_4)^3+(z_4-z_5)^3+(z_5-z_1)^3$$

দিতাম, তবে? ■

আর হ্যাঁ, এর আগের অংকটায় যে কায়দায় (A), (B) আর (C)-কে তাড়ালাম, সেটা কিন্তু অংকের জগতে খুব কাজের জিনিস। কায়দাটাকে অনেক সময়ে বলে method of invariance. ব্যাপারটা এইরকম--তোমাকে কোনো একটা x-এর উপর দুটো শর্ত দিয়ে বলল প্রথম শর্তটা পালিত হলেই দ্বিতীয়টাও পালিত হবে কি না। তার জন্য method of invariance-এর কায়দাটা হল, x-কে বদলানোর এমন কোনো কায়দা খুঁজে বার করা যেটা করলে প্রথম শর্তটা অক্ষুণ্ণ থাকে। কিন্তু যদি দ্যাখো, এর ফলে দ্বিতীয় শর্তটা ক্ষুণ্ণ হচ্ছে, তবে অমনি বলতে পারবে যে প্রথম শর্ত থেকেই দ্বিতীয়টা আসে না।

Fig 23

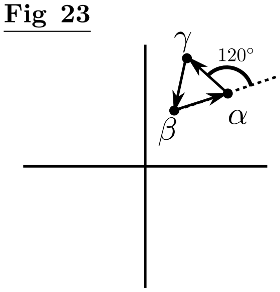
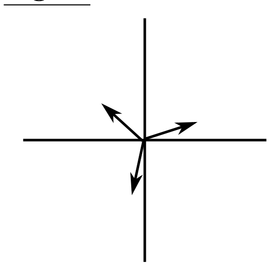
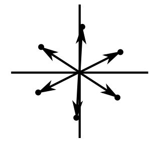
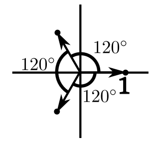


Fig 24



Answers

1. (i) হ্যাঁ, (ii) না, (iii) না, (iv) হ্যাঁ, (v) হ্যাঁ। **2.**  **3.** 

4. $\pm(5-3i)$. **5.** $\pm(1-i)$. **6.** $A=\sqrt{2},\ B=0$ বা $A=-\sqrt{2},\ B=0$ বা $A=0,\ B=\sqrt{2}$ বা $A=0,\ B=-\sqrt{2}$. **7.** 0, কারণ $\frac{\rho^n-1}{\rho-1}=0$, যেহেতু $\rho^n=1$. **8.** w-এর তীরচিহ্নটাই $\frac{360^\circ}{n}$ কোণে ঘুরে যাবে, ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে। **9.** $w,\ w\rho,\ w\rho^2,\ \ldots,\ w\rho^{n-1}$. **10.**

$$\begin{aligned}(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) &= (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)\\ &= \big((1-\omega^2)(1-\omega)\big)^2\\ &= \big((1-\omega^2-\omega+1)\big)^2\\ &= 9.\end{aligned}$$

11. এখানে $3+\omega+3\omega^2=3(1+\omega+\omega^2)-2\omega=-2\omega$. সুতরাং $(3+\omega+3\omega^2)^4=16\omega^4=16\omega$. তাই উত্তর (B). **12.** বাঁদিকে ω পাবে, আর ডানদিকে $(\omega^2)^2=\omega$. **13.**

$$\begin{aligned}xyz &= (a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)\\ &= (a+b)(a^2\omega^3+ab\omega^2+ab\omega^4+b^2\omega^3)\\ &= (a+b)(a^2+ab\omega^2+ab\omega+b^2)\\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\ &= (a^3+b^3).\end{aligned}$$

14. (D). **15.** (C). **16.** (B). **17.** $z=3+6iz_0^{3\times20}-3iz_0^{3\times31}=3+6i-3i=3(1+i)$. ছবি দিয়ে ভাবলেই বুঝবে $\mathrm{Arg}(z)=45^\circ$. তাই উত্তর (A). **18.** $\alpha^{101}=-\alpha^2$ এবং $\beta^{107}=-\beta^2=\alpha$. সুতরাং উত্তর হল $-\alpha^2+\alpha=1$, মানে (C), যেহেতু $\alpha^2-\alpha+1=0$. **19.** এখানে $\omega^{3n}=1$. একইভাবে $\omega^{3n+1}=\omega$ আর $\omega^{3n+2}=\omega^2$. সুতরাং উত্তর হল $1+\omega+\omega^2=0$, মানে (A). **20.** এখানে $\omega^n=\omega^{3k+1}=\omega$ এবং $\omega^{2n}=\omega^{6k+2}=\omega^2$. সুতরাং উত্তর হল $\omega+\omega^2=-1$, মানে (B). **21.** (C). **22.** (i) 12, (ii) 12, (iii) 6, (iv) 12. **23.** $z^2+(z\omega)^2+(z\omega^2)^2=z^2(1+\omega^2+\omega^4)=z^2(1+\omega^2+\omega)=0$. তাই (D) সঠিক। **24.** দুটোই শূন্য।

Index